Aufgabe 6.151

Für welche Werte von a sind die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\3\\-3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\-10\\a\end{pmatrix}$ linear abhängig?
Stellen Sie in diesem Falle den dritten Vektor als Linearkombination der beiden anderen dar!

Lösung:

Bei den Vektoren handelt es sich um die Spalten der Koeffizientenmatrix aus Aufgabe 6.148. Für $a \neq 1$ ist der Rang dieser Matrix gleich 3, sie enthält also 3 linear unabhängige Spalten, so dass der gegebene Vektor keine Linearkombination der beiden anderen Vektoren sein kann.

Im Falle $a = 1$ ist der Rang der Matrix allerdings gleich 2. Da die ersten beiden Spalten offensichtlich voneinander linear unabhängig sind, muss die dritte Spalte linear von diesen abhängen. Das zu dem Gleichungssystem aus Aufgabe 6.148 zugehörige homogene Gleichungssystem hat die allgemeine Lösung $\vec{x} = t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, damit gilt $t\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} + 2t\begin{pmatrix}-2\\3\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-10\\1\end{pmatrix} = \vec{0}$. Wählt man $t = 1$, so erhält man schließlich die Darstellung $\begin{pmatrix}3\\-10\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-2\\3\\-3\end{pmatrix}$.