Aufgabe 6.148

Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x-2y+\ \ 3z&=4\\ 4x+3y-10z&=5\\ 5x-3y+\ \ az&=b \end{aligned}$$
in Abhängigkeit von den Parametern a und b !

Geben Sie jeweils auch die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix an und stellen Sie den Zusammenhang zu den Lösbarkeitseigenschaften der Gleichungssysteme dar! Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch!

Lösung:

1	−2	3	4		von links nach rechts
4	3	−10	5	$\mathrm{II}-4\cdot\mathrm{I}$	Hauptdiagonale **1**,
5	−3	a	b	$\mathrm{III}-5\cdot\mathrm{I}$	darunter **0**
1	−2	3	4		
0	11	−22	−11	$\frac{1}{11}\cdot\mathrm{II}$	
0	7	$a-15$	$b-20$		
1	−2	3	4		
0	**1**	−2	−1		
0	7	$a-15$	$b-20$	$\mathrm{III}-7\cdot\mathrm{II}$	
1	−2	3	4		
0	1	−2	−1		
0	**0**	$a-1$	$b-13$	$\frac{1}{a-1}\cdot\mathrm{III}$ <u>falls $a\neq 1$</u>	
1	−2	3	4	$\mathrm{I}-3\cdot\mathrm{III}$	
0	1	−2	−1	$\mathrm{II}+2\cdot\mathrm{III}$	
0	0	**1**	$\frac{b-13}{a-1}$		
1	−2	**0**	$\frac{4a-3b+35}{a-1}$	$\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}$	von rechts nach links
0	1	**0**	$\frac{-a+2b-25}{a-1}$		oberhalb Hauptdiagonale **0**
0	0	1	$\frac{b-13}{a-1}$		
1	**0**	0	$\frac{2a+b-15}{a-1}$		
0	1	0	$\frac{-a+2b-25}{a-1}$		
0	0	1	$\frac{b-13}{a-1}$		

$$x=\frac{2a+b-15}{a-1},\ y=\frac{-a+2b-25}{a-1},\ z=\frac{b-13}{a-1}$$

Der Fall <u>$a=1$</u> muss gesondert behandelt werden. In diesem lautet das Schema im 4. Schritt

1	−2	3	4	
0	1	−2	−1	
0	**0**	0	$b-13$	für <u>$b\neq 13$</u> Widerspruch: $0x+0y+0z=b-13 \Longrightarrow$ GS unlösbar

Abschließend muss noch der Fall <u>$a=1,\ b=13$</u> behandelt werden. In diesem ergibt sich

1	−2	3	4	
0	1	−2	−1	
0	**0**	0	0	Nullzeile: $0x+0y+0z=0$, gilt immer, kann gestrichen werden
1	−2	3	4	$\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}$
0	1	−2	−1	
1	**0**	−1	2	
0	1	−2	−1	Zeilenstufenform, 1 frei wählbarer Parameter (zweckmäßig: $z=t$)

$$\begin{aligned} x - z &= 2: & x &= 2 + z = 2 + t \\ y - 2z &= -1: & y &= -1 + 2z = -1 + 2t \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{spez. Lsg} \\ \text{inhom. GS}}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{allg.Lsg} \\ \text{hom. GS}}}$$

Rangbetrachtungen für das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$:

$a \neq 1$: $\underbrace{\text{rang}(\boldsymbol{A})}_{\substack{\text{Koeff.-} \\ \text{matrix}}} = \underbrace{\text{rang}(\boldsymbol{A}|\vec{b})}_{\substack{\text{erw. Koeff.-} \\ \text{matrix}}} = 3 = n \implies$ Gleichungssystem eindeutig lösbar

$a = 1, b \neq 13$: $\text{rang}(\boldsymbol{A}) = 2 \neq \text{rang}(\boldsymbol{A}|\vec{b}) = 3 \implies$ Gleichungssystem unlösbar

$a = 1, b = 13$: $\text{rang}(\boldsymbol{A}) = \text{rang}(\boldsymbol{A}|\vec{b}) = 2 < n = 3 \implies$ Gleichungssystem mehrdeutig lösbar, $n - \text{rang}(\boldsymbol{A}) = 1$ frei wählbarer Parameter

Geometrische Interpretation: Lagebeziehung zwischen 3 Ebenen

$a \neq 1$: Die 3 Ebenen schneiden sich in einem Punkt.

$a = 1, b \neq 13$: Die Schnittgerade der beiden ersten Ebenen ist zur 3. Ebene (echt) parallel, so dass die 3 Ebenen keinen gemeinsamen Punkt haben.

$a = 1, b = 13$: Die Schnittgerade der beiden ersten Ebenen liegt in der 3. Ebene, ist also Lösung.