Aufgabe 6.147

Gegeben sei das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 3x - 7y + 2z &= -7 \\ x + y - z &= 6 \\ 8x - 2y + \lambda z &= \mu \quad . \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda = 2$, $\mu = 8$ mit dem Gaußschen Algorithmus!

b) Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar? Geben Sie im Falle der mehrdeutigen Lösbarkeit auch die Lösung an! Welche geometrische Bedeutung haben die drei Fälle?

Lösung:

a) Zur Vereinfachung der Rechnung empfiehlt sich ein Tausch der ersten und zweiten Zeile.

Gaußscher Algorithmus:

$$\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 1 & -1 & 6 \\ 3 & -7 & 2 & -7 \\ 8 & -2 & 2 & 8 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 6 \\ \mathbf{0} & -10 & 5 & -25 \\ \mathbf{0} & -10 & 10 & -40 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & -1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & \mathbf{0} & 3 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 1 & \mathbf{0} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}$$

Lösung: $x = 2,\ y = 1,\ z = -3$

b) Mit λ und μ ergibt sich
$$\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 1 & -1 & 6 \\ 3 & -7 & 2 & -7 \\ 8 & -2 & \lambda & \mu \\ \hline 1 & 1 & -1 & 6 \\ \mathbf{0} & -10 & 5 & -25 \\ \mathbf{0} & -10 & \lambda+8 & \mu-48 \\ \hline \end{array}$$

Offensichtlich hat die Koeffizientenmatrix für $\lambda \neq -3$ den Rang 3, so dass das Gleichungssystem in diesem Falle eindeutig lösbar ist. Geometrisch entspricht das dem Fall von drei sich in einem Punkt schneidenden Ebenen, die durch die drei gegebenen Gleichungen beschrieben werden.

Für $\lambda = -3$ hat die Koeffizientenmatrix hingegen den Rang 2, das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $\mu - 48 = -25$ ist.

Also ist das Gleichungssystem für $\lambda = -3$, $\mu \neq 23$ unlösbar. Das entspricht geometrisch dem Fall, dass drei Ebenen keinen gemeinsamen Punkt haben (Die Schnittgerade der ersten beiden Ebenen ist echt parallel zur dritten Ebene.).

Für $\lambda = -3$, $\mu = 23$ schneiden sich die drei Ebenen hingegen in einer Geraden, das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Fortsetzung des Gaußschen Algorithmus ergibt
$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & \mathbf{1} & -5 \\ \hline 1 & -1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{array} \qquad \begin{aligned} x &= 1 + y \\ z &= -5 + 2y \end{aligned}$$

Somit lautet in diesem Falle die Lösung des Gleichungssytems $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.