Aufgabe 6.142

In einer Mensa werden die Essen A, B und C (damit sich hier mit einfachen Zahlen rechnen lässt) an Studenten zum Preis von 1, 2 bzw. 3 € und an Mitarbeiter zum Preis von 2, 4 bzw. 5 € abgegeben. An einem Tag werden 3000 Essenportionen verkauft und ein Umsatz von 7100 € erzielt. Dabei werden an Studenten insgesamt fünfmal so viele Portionen ausgegeben wie an Mitarbeiter. Der Wareneinsatz beträgt bei dem Essen A 1 € sowie bei den Essen B und C 1,50 € pro Portion und insgesamt an diesem Tag 4150 €. Der Personalaufwand beträgt bei den Essen A und B 1,50 € sowie beim Essen C 2 € pro Person und insgesamt an diesem Tag 4950 €.

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Zahl der an Studenten bzw. Mitarbeiter abgegebenen Portionen der einzelnen Essen auf!
b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus!
c) Wie viele verschiedene Lösungen für den beschrieben Sachverhalt gibt es?

Lösung:

a) an Studenten: x_1 Portionen A, x_2 Portionen B, x_3 Portionen C,
an Mitarbeiter: x_4 Portionen A, x_5 Portionen B, x_6 Portionen C

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Portionen:} & x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 &=& 3000\\
\text{Umsatz in €:} & x_1+2x_2+3x_3+2x_4+4x_5+5x_6 &=& 7100\\
\text{Verhältnis Studenten/Mitarbeiter:} & x_1+x_2+x_3-5x_4-5x_5-5x_6 &=& 0\\
\text{Wareneinsatz in €:} & x_1+1.5x_2+1.5x_3+x_4+1.5x_5+1.5x_6 &=& 4150\\
\text{Personalaufwand in €:} & 1.5x_1+1.5x_2+2x_3+1.5x_4+1.5x_5+2x_6 &=& 4950
\end{array}$$

b) Zur Vereinfachung der Darstellung werden die letzten beiden Gleichungen für das Gaußschema mit 2 multipliziert:

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3000 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 5 & 7100 \\
1 & 1 & 1 & -5 & -5 & -5 & 0 \\
2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 8300 \\
3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 4 & 9900 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3000 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4100 \\
0 & 0 & 0 & -6 & -6 & -6 & -3000 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2300 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 900 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3000 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4100 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 500 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -3 & -1800 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 900 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3000 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4100 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 900 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 500 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -900 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3000 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4100 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 900 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 500 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 400 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2600 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2900 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 900 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 400 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2800 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 900 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 400 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1600 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1000 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 900 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 400 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1000 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 900 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 400 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 600 \\
x_2 - x_6 &= 1000 \\
x_3 + x_6 &= 900 \\
x_4 &= 100 \\
x_5 + x_6 &= 400
\end{aligned}
$$

Mit $x_6 = \lambda$ erhält man die Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 1000+\lambda \\ 900-\lambda \\ 100 \\ 400-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Alle Portionszahlen müssen nichtnegativ und ganzzahlig sein, also muss λ eine ganze Zahl mit $0 \leq \lambda \leq 400$ sein. Dann werden an Studenten 600 Portionen Essen A, $1000+\lambda$ Essen B und $900-\lambda$ Essen C ausgegeben, an Mitarbeiter 100 Essen A, $400-\lambda$ Essen B und λ Essen C.

c) Da λ eine ganze Zahl mit $0 \leq \lambda \leq 400$ sein muss, gibt es 401 verschiedene Lösungen.