

Aufgabe 6.141

Eine Firma verkauft 3 Produkte A, B und C zu Preisen von 4000, 1000 und 2000 Euro. Die Herstellung von Produkt A benötigt 3 Einheiten von Rohstoff 1 und 5 Einheiten von Rohstoff 2, für Produkt B werden je 1 Einheit der beiden Rohstoffe benötigt und für Produkt C 1 Einheit von Rohstoff 1 und 3 Einheiten von Rohstoff 2.

Bei einer kompletten Tagesproduktion wurden 17 Einheiten Rohstoff 1 und 31 Einheiten Rohstoff 2 verarbeitet, die Tagesproduktion wurde zu einem Gesamtpreis von 24 000 Euro verkauft.

- Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der produzierten Zahl der einzelnen Produkte auf!
- Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus!
- Wie viele verschiedene Lösungen für den beschriebenen Sachverhalt gibt es? Geben Sie diese an!

Lösung:

- a) x_1 : Anzahl Produkt A, x_2 : Anzahl Produkt B, x_3 : Anzahl Produkt C

Preise in T€: $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 24$

Rohstoff 1: $3x_1 + x_2 + x_3 = 17$

Rohstoff 2: $5x_1 + x_2 + 3x_3 = 31$

- b) Zur Vereinfachung der Rechnung wird die Reihenfolge der Variablen in x_2, x_3, x_1 geändert, außerdem werden die erste und die zweite Zeile getauscht. Das Gleichungssystem lautet dann

$$x_2 + x_3 + 3x_1 = 17$$

$$x_2 + 2x_3 + 4x_1 = 24$$

$$x_2 + 3x_3 + 5x_1 = 31$$

x_2	x_3	x_1	
1	1	3	17
1	2	4	24
1	3	5	31
1	1	3	17
0	1	1	7
0	2	2	14
1	1	3	17
0	1	1	7
0	0	0	0
1	0	2	10
0	1	1	7

$$x_2 + 2x_1 = 10, \quad x_2 = 10 - 2x_1$$

$$x_3 + x_1 = 7, \quad x_3 = 7 - x_1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- c) Die Lösungskomponenten x_i müssen als Produktanzahlen nichtnegativ und ganzzahlig sein. $x_1 = t \geq 0, x_2 = 10 - 2t \geq 0$ und $x_3 = 7 - t \geq 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $0 \leq t \leq 5$ ist, wegen der Ganzzahligkeit gibt es also 6 verschiedene Lösungen mit $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

t	Produkte A	Produkte B	Produkte C
0	0	10	7
1	1	8	6
2	2	6	5
3	3	4	4
4	4	2	3
5	5	0	2