Aufgabe 6.140

Für die Auszahlung von jeweils 90 € an 40 Personen stehen 30 50€–Scheine, 70 20€–Scheine und 70 10€–Scheine zur Verfügung. Jede Person soll den Betrag passend erhalten, wobei niemand mehr als 5 Scheine bekommen soll. Deshalb kommen nur die Stückelungen $50+2\times 20$, $50+20+2\times 10$, $50+4\times 10$ und $4\times 20+10$ in Frage. Wie oft müssen die einzelnen Stückelungsversionen zur Anwendung kommen? Ermitteln Sie alle möglichen Lösungen! Wie viele verschiedene Lösungen gibt es?

Lösung:

Es stehen $30\times 50+70\times 20+70\times 10=3600$ €, also genau 40×90 € zur Verfügung.

Stückelungsversion 1: $50+2\times 20$,
2: $50+20+2\times 10$,
3: $50+4\times 10$,
4: $4\times 20+10$

x_i: Anzahl Stückelungsversion i,

$$\begin{array}{lrl} \text{50 €–Scheine:} & x_1+\ x_2+\ x_3 \qquad\ & =30 \\ \text{20 €–Scheine:} & 2x_1+\ x_2 \qquad\ +4x_4 & =70 \\ \text{50 €–Scheine:} & 2x_2+4x_3+\ x_4 & =70 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 70 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 70 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 70 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 70 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 90 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}$$

$x_3=t$ frei wählbar

$$\begin{aligned} x_1 &= \qquad t \\ x_2 &= 30-2t \\ x_3 &= \qquad t \\ x_4 &= 10 \end{aligned}$$

Damit die Lösung sinnvoll ist, müssen alle $x_i\geq 0$ und ganzzahlig sein. Für x_4 ist das erfüllt, aus $x_1=x_3=t$ folgt, dass $t\geq 0$ und ganzzahlig sein muss. Aus $x_2=30-2t\geq 0$ folgt außerdem $t\leq 15$.

Also ist $t=0,1,2,\ldots,14,15$ möglich, es gibt 16 verschiedene Lösungen:

x_1	x_2	x_3	x_4
0	30	0	10
1	28	1	10
2	26	2	10
3	24	3	10
4	22	4	10
5	20	5	10
6	18	6	10
7	16	7	10

x_1	x_2	x_3	x_4
8	14	8	10
9	12	9	10
10	10	10	10
11	8	11	10
12	6	12	10
13	4	13	10
14	2	14	10
15	0	15	10