

Aufgabe 6.135

Ein Chemiebetrieb produziert vier Waschmittel, wobei drei Rohstoffe in folgenden Mengen verbraucht werden:

	je Tonne			
	WM ₁	WM ₂	WM ₃	WM ₄
R ₁ (in t)	1/2	0	1/2	1/4
R ₂ (in t)	3/5	3/5	0	3/5
R ₃ (in t)	0	1	3/5	3/5

Es sind 2t R₁, 3t R₂ und 1t R₃ vorhanden. Welche Waschmittel müssen in welchen Mengen produziert werden, damit alle Rohstoffe vollständig verbraucht werden? Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Lösung!

Lösung:

x_1 bis x_4 seien die zu produzierenden Mengen der Waschmittel 1 bis 4 in Tonnen. Dann muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 &+ \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 2 \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 &+ \frac{3}{5}x_4 = 3 \\ x_2 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Rechnung werden die erste Gleichung mit 2 und die zweite Gleichung mit $\frac{5}{3}$ multipliziert und auf das so entstandene Gleichungssystem der Gaußsche Algorithmus angewandt:

$$\begin{array}{c|c} \underline{1 \ 0 \ 1 \ \frac{1}{2} \ | \ 4} & \underline{1 \ 0 \ 1 \ \frac{1}{2} \ | \ 4} & \underline{1 \ 0 \ 1 \ \frac{1}{2} \ | \ 4} & \underline{1 \ 0 \ 1 \ \frac{1}{2} \ | \ 4} & \underline{1 \ 0 \ 0 \ \frac{7}{16} \ | \ 4} \\ \underline{1 \ 1 \ 0 \ 1 \ | \ 5} & \underline{0 \ 1 \ -1 \ \frac{1}{2} \ | \ 1} & \underline{0 \ 1 \ -1 \ \frac{1}{2} \ | \ 1} & \underline{0 \ 1 \ -1 \ \frac{1}{2} \ | \ 1} & \underline{0 \ 1 \ 0 \ \frac{9}{16} \ | \ 1} \\ \underline{0 \ 1 \ \frac{3}{5} \ \frac{3}{5} \ | \ 1} & \underline{0 \ 1 \ \frac{3}{5} \ \frac{3}{5} \ | \ 1} & \underline{0 \ 0 \ \frac{8}{5} \ \frac{1}{10} \ | \ 0} & \underline{0 \ 0 \ 1 \ \frac{1}{16} \ | \ 0} & \underline{0 \ 0 \ 1 \ \frac{1}{16} \ | \ 0} \end{array}$$

Also gilt $x_1 = 4 - \frac{7}{16}x_4$, $x_2 = 1 - \frac{9}{16}x_4$, $x_3 = -\frac{1}{16}x_4$, aus Letzterem und der Nichtnegativitätsbedingung folgt $x_3 = x_4 = 0$ und damit $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ als eindeutige Lösung. Somit müssen 4 t Waschmittel 1 und 1 t Waschmittel 2 produziert werden, während die Waschmittel 3 und 4 nicht zu produzieren sind.