Aufgabe 6.126

Sei ε eine beliebige reelle Zahl. Handelt es sich bei $\{(1,2,3)^\mathsf{T},(2,5,7)^\mathsf{T},(3,7,10+\varepsilon)^\mathsf{T}\}$ um eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Bestimmen Sie ggf. die Koeffizienten von $(1,1,1)^\mathsf{T}$ in dieser Basis
a) allgemein, b) für $\varepsilon = 1$, c) für $\varepsilon = 0{,}0001$!

Lösung:

Wir lösen das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\alpha+\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}\beta+\begin{pmatrix}3\\7\\10+\varepsilon\end{pmatrix}\gamma=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Ist es eindeutig lösbar, so sind die gesuchten Koeffizienten bestimmt. Das zugehörige homogene System ist dann auch eindeutig lösbar und hat damit nur die triviale Lösung, so dass das gegebene Vektorsystem eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

Ist das System hingegen unlösbar bzw. mehrdeutig lösbar, so hat das zugehörige homogene System auch nichttriviale Lösungen und das gegebene Vektorsystem bildet keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 3 & 1\\
2 & 5 & 7 & 1\\
3 & 7 & 10+\varepsilon & 1\\ \hline
1 & 2 & 3 & 1\\
0 & 1 & 1 & -1\\
0 & 1 & 1+\varepsilon & -2\\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 3 & 1\\
0 & 1 & 1 & -1\\
0 & 0 & \varepsilon & -1\\ \hline
1 & 2 & 3 & 1\\
0 & 1 & 1 & -1\\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\varepsilon}\\ \hline
\end{array}
\quad \text{falls } \varepsilon \neq 0
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 0 & 1+\frac{3}{\varepsilon}\\
0 & 1 & 0 & -1+\frac{1}{\varepsilon}\\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\varepsilon}\\ \hline
1 & 0 & 0 & 3+\frac{3}{\varepsilon}\\
0 & 1 & 0 & -1+\frac{1}{\varepsilon}\\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\varepsilon}
\end{array}$$

Im Falle $\varepsilon=0$ ist das Gleichungssystem unlösbar, die drei Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Anderenfalls handelt es sich um eine Basis. Der Vektor lässt sich in dieser Basis darstellen durch

a) $$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{3\varepsilon+1}{\varepsilon}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}-\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix}3\\7\\10+\varepsilon\end{pmatrix},$$

b) $$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix}\quad\text{bzw.}$$

c) $$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=10\,003\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+9\,999\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}-10\,000\begin{pmatrix}3\\7\\10{,}0001\end{pmatrix}.$$