Aufgabe 6.116

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +7x_4 & = & 13 \\ x_1 & & +6x_3 & +5x_4 & = & -4 \\ -x_1 & -8x_2 & +6x_3 & -\ x_4 & = & -24 \end{array} \quad !$$

Welchen Rang hat die Koeffizientenmatrix, wie hängt dieser mit der Zahl der freien Variablen (frei wählbaren Parameter in der allgemeinen Lösung) zusammen? Führen Sie für die ermittelte allgemeine Lösung auch die Probe aus!

Lösung:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 13 \\ 1 & 0 & 6 & 5 & -4 \\ -1 & -8 & 6 & -1 & -24 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -7 \\ 0 & -6 & 9 & 3 & -21 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 6 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1+6x_3+5x_3=-4 \\ x_2-\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4=\ \frac{7}{2} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix (Zahl der Nichtnullzeilen in der beim dritten Gaußschritt erreichten Stufenform) ist 2, deshalb gibt es in der allgemeinen Lösung $n-\text{Rang}(\boldsymbol{A})=4-2=2$ frei wählbare Variable.

Probe:

Es gilt tatsächlich $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \\ -1 & -8 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -4 \\ -24 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \\ -1 & -8 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \\ -1 & -8 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$