Aufgabe 6.110

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4+3x_5&=1\\ -x_1+\ x_2-x_3+x_4-\ x_5&=2 \end{aligned}$.

a) Geben Sie eine spezielle und die allgemeinen Lösung an des Gleichungssystems an!

b) Welcher Zusammenhang besteht zu den Rängen der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix?

c) Geben Sie drei linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems $\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4+3x_5&=0\\ -x_1+\ x_2-x_3+x_4-\ x_5&=0 \end{aligned}$ an!

d) Können vier Lösungen dieses homogenen Systems linear unabhängig sein?

Lösung:

a) Addieren der beiden Gleichungen liefert $-x_2+2x_5=3 \;\Rightarrow\; x_2=2x_5-3$.
Einsetzen dieses Resultats in die erste Gleichung führt auf
$x_1-2(2x_5-3)+x_3-x_4+3x_5=1$, also $x_1=-x_3+x_4+x_5-5$. Wir führen frei wählbare Parameter $x_3=r,\ x_4=s,\ x_5=t$ ein und erhalten die allgemeine Lösung
$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\0\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. Eine spezielle Lösung erhält man z.B., wenn man $r=s=t=0$ setzt, es ist dann $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

b) Das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$ ist lösbar genau dann, wenn die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmen: $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\vec{b})$. Ist dies der Fall, so enthält die Lösung $n-\operatorname{rang}(\boldsymbol{A})$ frei wählbare Parameter, eindeutige Lösbarkeit liegt also für $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A})=n$ vor.

Da sowohl die Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ als auch die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\boldsymbol{A}|\vec{b})$ zwei Zeilen enthalten, die offensichtlich nicht voneinander abhängig sind, gilt $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\vec{b})=2$, das Gleichungssystem ist lösbar. Die allgemeine Lösung enthält $n-\operatorname{rang}(\boldsymbol{A})=5-2=3$ frei wählbare Parameter.

c) Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems setzt sich zusammen aus einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems (hier $\begin{pmatrix}-5\\-3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$) und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems, die als Linearkombination von $n-\operatorname{rang}(\boldsymbol{A})$ linear unabhängigen Lösungen des homogenen Systems darstellbar ist. Drei linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems sind also z.B. die die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems aufspannenden Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Nein! Wie oben gezeigt, ist jede Lösung des homogenen Systems eine Linearkombination der $n - \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = 3$ unter c) angegebenen Lösungen, d.h., sie ist von diesen linear abhängig. Mit anderen Worten: Der Lösungsraum des homogenen Systems wird von nur drei Vektoren aufgespannt, es kann in ihm also keine vier linear unabhängigen Elemente geben.