Aufgabe 6.108

Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Gleichungssysteme

$$\text{a)}\quad \begin{array}{rcl} 4x_1+x_2 &=& 6 \\ x_1-x_2+5x_3 &=& 14 \\ 2x_1+2x_2-3x_3 &=& -3 \end{array}, \qquad \text{b)}\quad \begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4 &=& 1 \\ 6x_1+x_2+4x_3+3x_4 &=& 4 \\ x_1+3x_2+4x_4 &=& 2 \end{array}, \qquad \text{c)}\quad \begin{array}{rcl} 2x_1+3x_2+x_3+x_4 &=& 1 \\ -x_1-x_2+x_4 &=& 2 \\ x_1+2x_2+x_3+2x_4 &=& 1 \end{array}$$

Lösung:

a)

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 5 & 14 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 1 & -1 & 5 & 14 \\ 0 & 4 & -13 & -31 \\ 0 & 5 & -20 & -50 \\ \hline \end{array}$$

2. u. 3. Zeile vertauschen:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 4 & -13 & -31 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ \hline 1 & -1 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

eindeutige Lösung:
$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$

b)

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & -2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -5 & -2 & -3 & -2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{9} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 & \frac{10}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{9} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{6}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{9} \end{array}$$

Mit dem Parameter $t=x_4$ erhält man als allgemeine Lösung $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c)

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Die letzte Zeile bedeutet $0=2$, also ist das Gleichungssystem unlösbar.