Aufgabe 6.98

a) Wie müssen die Parameter a und b gewählt werden, damit die Matrix $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ den Rang 0, 1 bzw. 2 hat?

b) Lösen Sie in den drei Fällen das homogene lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{0}$!

Lösung:

a) Den Rang 0 hat nur die Nullmatrix, also muss da $a=b=0$ sein.

Für den Rang 1 müssen die Zeilen Vielfache voneinander sein. Ist $a\neq 0$, so muss wegen der ersten Komponenten der Zeilen die zweite Zeile das b/a-fache der ersten Zeile sein, also muss dann auch $\frac{b}{a}b=a$ und damit $b^2=a^2$, $b=\pm a$ sein. Analog kann man auch für $b\neq 0$ argumentieren. Tatsächlich haben die Matrizen $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$ für $a\neq 0$ den Rang 1. Dieser Rang liegt somit genau dann vor, wenn $b=\pm a\neq 0$ ist.

Der Rang 2 schließlich liegt in allen anderen Fällen vor, d.h., wenn $b\neq\pm a$ ist. (Diese Formulierung schließt auch den Fall $a=b=0$ aus.)

b) Ist der Rang 0, so enthält die Lösung des Gleichungssystems zwei frei wählbare Parameter. Offensichtlich ist jeder Vektor der Ebene Lösung des Gleichungssystems $\begin{matrix} 0x+0y=0 \\ 0x+0y=0 \end{matrix}$. Die allgemeine Lösung kann somit in der Form $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ notiert werden.

Ist der Rang 1, so enthält die Lösung des Gleichungssystems einen frei wählbaren Parameter. Wegen $a\neq 0$ ergibt sich als Lösung von $ax\pm ay=0$ die Gerade $y=\mp x$. Sie kann auch in der Form $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ notiert werden.

Ist der Rang 2, so ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, es gibt nur den Koordinatenursprung als triviale Lösung: $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.