Aufgabe 6.82

Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ quadratische Matrizen der Ordnung n mit $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

a) Zeigen Sie, dass dann $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ und $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{n-i}$ gilt!

b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass bei $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ diese Formeln nicht gelten müssen!

Lösung:

a) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{AA}-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{BB}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ wegen Kommutativität,

auch bei zweiter Formel Kommutativität benutzen, Beweis mit vollständiger Induktion:

Für $n=1$ ist die Formel offensichtlich richtig:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^1=\sum_{i=0}^{n}\binom{1}{i}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{n-i}=\binom{1}{0}\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{B}^1+\binom{1}{1}\boldsymbol{A}^1\boldsymbol{B}^0=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}.$$

Induktionsschritt:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{n+1}=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{n-i}\right)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\boldsymbol{A}^{i+1}\boldsymbol{B}^{n-i}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{n+1-i}$$

$$=\binom{n}{n}\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{B}^0+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\boldsymbol{A}^{i+1}\boldsymbol{B}^{n-i}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{n+1-i}+\binom{n}{0}\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{B}^{n+1}$$

$$=\binom{n}{n}\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{B}^0+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{n-(i-1)}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{n+1-i}+\binom{n}{0}\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{B}^{n+1}$$

$$=\binom{n+1}{n+1}\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{B}^0+\sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right)\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{n+1-i}+\binom{n+1}{0}\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{B}^{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{n+1-i},$$

da $\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}=\dfrac{n(n-1)\dots(n-i+2)}{(i-1)!}+\dfrac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}$

$$=\frac{n(n-1)\dots(n-i+2)(i+(n-i+1))}{i!}=\binom{n+1}{i}$$

b) Sei $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Für diese Matrizen gilt $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}.$$