Aufgabe 6.80

$\boldsymbol{A}$ sei eine beliebige Matrix. Mit welcher Matrix $\boldsymbol{B}$ muss man die Matrix $\boldsymbol{A}$ von rechts multiplizieren (d.h. $\boldsymbol{AB}$ berechnen), damit

a) die 1. Spalte verdoppelt wird,
b) eine einspaltige Matrix entsteht, deren Komponenten die Summen der Zeilen der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind,
c) von der 2. Spalte das Dreifache der 1. Spalte abgezogen wird,
d) die letzte und die vorletzte Spalte vertauscht werden,
e) die Spalten in entgegengesetzter Reihenfolge entstehen, d.h. die letzte Spalte zur 1. Spalte wird usw.?

Wie müsste die Aufgabenstellung geändert werden, um die gleichen Effekte für Zeilen zu erreichen?

Lösung:

a) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ 2a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
$2 *$ Element aus 1. Spalte

b) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
$1 *$ Element jeder Spalte und addieren

c) $$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
$-3 *$ Element aus 1. Spalte $+ 1 *$ Element aus 2. Spalte

d) $$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-3} & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-3,1} & \cdots & a_{m-3,n-3} & a_{m-3,n-2} & a_{m-3,n-1} & a_{m-3,n} \\ a_{m-2,1} & \cdots & a_{m-2,n-3} & a_{m-2,n-2} & a_{m-2,n-1} & a_{m-2,n} \\ a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,n-3} & a_{m-1,n-2} & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,n-3} & a_{m,n-2} & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-3} & a_{1,n-2} & a_{1n} & a_{1,n-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-3,1} & \cdots & a_{m-3,n-3} & a_{m-3,n-2} & a_{m-3,n} & a_{m-3,n-1} \\ a_{m-2,1} & \cdots & a_{m-2,n-3} & a_{m-2,n-2} & a_{m-2,n} & a_{m-2,n-1} \\ a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,n-3} & a_{m-1,n-2} & a_{m-1,n} & a_{m-1,n-1} \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,n-3} & a_{m,n-2} & a_{mn} & a_{m,n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$

1 $*$ Element aus vorletzter Spalte

1 $*$ Element aus letzter Spalte

e) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ usw.

1 $*$ Element aus vorletzter Spalte

1 $*$ Element aus letzter Spalte

Um die entsprechenden Effekte für die Zeilen auszulösen, müsste die Multiplikation von links erfolgen. Wegen $(\boldsymbol{AB})^\mathsf{T} = \boldsymbol{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ wäre dabei jeweils die transponierte zu der oben angegebenen Matrix zu verwenden.