Aufgabe 6.68

Zerlegen Sie die Matrix $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&-4&3&2&1\\4&3&-1&-2&3\\0&2&5&4&1\\2&1&0&2&-1\end{pmatrix}$ in die Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix!

Lösung:

symmetrisch: $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{A}$ (symmetrisch zur Hauptdiagonale),
schiefsymmetrisch: $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=-\boldsymbol{A}$, d.h. insbesondere $a_{ii}=-a_{ii} \implies a_{ii}=0$
(Nullen auf Hauptdiagonale)

$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ ist symmetrisch: $c_{ij}=a_{ij}+a_{ji},\ c_{ji}=a_{ji}+a_{ij}$,
$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ ist schiefsymmetrisch: $d_{ij}=a_{ij}-a_{ji},\ d_{ji}=a_{ji}-a_{ij}=-d_{ij}$

Offensichtlich ist dann $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\right)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\right)$ die geforderte Zerlegung.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&-4&3&2&1\\4&3&-1&-2&3\\0&2&5&4&1\\2&1&0&2&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}1&5&4&0&2\\2&-4&3&2&1\\3&3&-1&5&0\\4&2&-2&4&2\\5&1&3&1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&7&7&4&7\\7&-8&6&4&2\\7&6&-2&3&3\\4&4&3&8&3\\7&2&3&3&-2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-3&-1&4&3\\3&0&0&0&0\\1&0&0&-7&3\\-4&0&7&0&-1\\-3&0&-3&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&\frac{7}{2}&\frac{7}{2}&2&\frac{7}{2}\\\frac{7}{2}&-4&3&2&1\\\frac{7}{2}&3&-1&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\2&2&\frac{3}{2}&4&\frac{3}{2}\\\frac{7}{2}&1&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&2&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&0&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&-\frac{7}{2}&\frac{3}{2}\\-2&0&\frac{7}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}&0&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$