Aufgabe 6.67

Eine Matrix heißt schiefsymmetrisch, wenn $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}=-\boldsymbol{A}$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe der Matrizen $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ und $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$, dass sich jede quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix darstellen lässt!

Lösung:

Es gilt $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^\mathsf{T})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^\mathsf{T})$.

Dabei ist $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ symmetrisch: $c_{ij}=a_{ij}+a_{ji},\ c_{ji}=a_{ji}+a_{ij}$
und $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ schiefsymmetrisch: $d_{ij}=a_{ij}-a_{ji},\ d_{ji}=a_{ji}-a_{ij}=-d_{ij}$.

Diese Eigenschaften gelten offensichtlich auch für die Hälfte dieser Matrizen, so dass die geforderte Zerlegung vorliegt.