Aufgabe 6.65

Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie folgende Ausdrücke, sofern diese existieren:

a) $\boldsymbol{AB}\vec{d}$, b) $\vec{d}\boldsymbol{BA}^\mathsf{T}$, c) $\vec{d}\vec{c}^\mathsf{T} + \boldsymbol{A}^\mathsf{T}$, d) $\boldsymbol{A}\vec{d} + \vec{c}$, e) $\boldsymbol{B}\vec{c} + \vec{d}$, f) $\boldsymbol{B}\vec{d} + \vec{c}^\mathsf{T}$, g) $\vec{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\vec{d}$, h) $(\boldsymbol{A}\vec{d})^\mathsf{T}\boldsymbol{A}$!

Lösung:

a) $\boldsymbol{AB}\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Produkt von Matrizen vom Typ $2\times\mathbf{1}$, $\mathbf{2}\times 2$ und 2×3 existiert nicht wegen $\mathbf{1} \neq \mathbf{2}$.

c) $\vec{d}\vec{c}^\mathsf{T} + \boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} (2 \quad 1 \quad 1) + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\boldsymbol{A}\vec{d} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) Erster Summand Produkt von Matrizen vom Typ $2\times\mathbf{2}$ und $\mathbf{3}\times 1$: existiert nicht wegen $\mathbf{2} \neq \mathbf{3}$.

f) Erster Summand Produkt von Matrizen vom Typ 2×2 und 2×1, d.h. vom Typ 2×1, zweiter Summand vom Typ 3×1, Summe existiert nicht.

g) $\vec{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\vec{d} = (2 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$

h) $(\boldsymbol{A}\vec{d})^\mathsf{T}\boldsymbol{A} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^\mathsf{T} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = (1 \quad -6 \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = (-20 \quad 7)$