Aufgabe 6.64

Sei $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie folgende Ausdrücke, sofern diese existieren:

a) $\boldsymbol{A}\vec{x}+\vec{y}$, b) $\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}+\vec{x}$, c) $\vec{y}\boldsymbol{A}\vec{x}$, d) $\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{x}$, e) $\vec{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{y}$, f) $\vec{x}^{\mathsf{T}}\left(\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\right)^{\mathsf{T}}$, g) $\boldsymbol{A}\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}$, h) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{y}\vec{x}^{\mathsf{T}}$!

Lösung:

a) $\boldsymbol{A}\vec{x}+\vec{y}=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$

b) $\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}+\vec{x}=\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -6 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ existiert nicht

c) Produkt von Matrizen vom Typ $2\times\mathbf{1}$, $\mathbf{2}\times 3$ und 3×1 existiert nicht wegen $\mathbf{1}\neq\mathbf{2}$

d) $\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{x}=\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=11$

e) Produkt von Matrizen vom Typ 1×3, 2×3 und 2×1 existiert nicht wegen $3\neq 2$

f) $\vec{x}^{\mathsf{T}}\left(\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\right)^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)^{\mathsf{T}}==\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-6\\5\end{pmatrix}=11$

(oder $\vec{x}^{\mathsf{T}}\left(\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\right)^{\mathsf{T}}=\vec{x}^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}\vec{y}^{\mathsf{T}\mathsf{T}}=\vec{x}^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}\vec{y}=\left(\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{x}\right)^{\mathsf{T}}=11^{\mathsf{T}}=11)$

g) $\boldsymbol{A}\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -6 & 9\end{pmatrix}$

h) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{y}\vec{x}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-6\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -6 & 6 & -6\\ 5 & -5 & 5\end{pmatrix}$