Aufgabe 6.63

Sei $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=(3 \quad 1)$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie folgende Ausdrücke, sofern diese existieren:

a) $\boldsymbol{AC}\vec{x}$, b) $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}^\mathsf{T}\vec{x}^\mathsf{T}$, c) $\vec{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$, d) $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}$, e) $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}^\mathsf{T}$, f) $\boldsymbol{AC}\vec{y}$, g) $\boldsymbol{BC}\vec{y}$, h) $\vec{x}^\mathsf{T}\vec{y}$, i) $\vec{x}\vec{y}^\mathsf{T}$!

Lösung:

a) $\boldsymbol{AC}\vec{x}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ -10\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 12\end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}^\mathsf{T}\vec{x}^\mathsf{T}$ existiert nicht, da $\boldsymbol{C}^\mathsf{T}$ (Typ $2\times\mathbf{3}$) und $\vec{x}^\mathsf{T}$ (Typ $\mathbf{1}\times 2$) unverträglich sind.

c) $\vec{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}=(3 \quad 2)\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}=(7 \quad -10 \quad 2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}=(-5 \quad 12)$

(vgl. a): Wegen $(\boldsymbol{MN})^\mathsf{T}=\boldsymbol{N}^\mathsf{T}\boldsymbol{M}^\mathsf{T}$ ist $(\boldsymbol{AC}\vec{x})^\mathsf{T}=\vec{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$.)

d) $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}$ existiert nicht, da $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ (Typ $3\times\mathbf{2}$) und $\boldsymbol{C}$ (Typ $\mathbf{3}\times 2$) unverträglich sind.

e) $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}^\mathsf{T}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 0 & -9 & -1\\ 6 & -15 & 1\end{pmatrix}$

f) $\boldsymbol{AC}\vec{y}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, da die Typen verträglich sind, $\boldsymbol{A}$ 2 Zeilen hat und $\vec{y}$ der Nullvektor ist.

g) $\boldsymbol{BC}\vec{y}$ existiert nicht, da $\boldsymbol{B}$ (Typ $1\times\mathbf{2}$) und $\boldsymbol{C}$ (Typ $\mathbf{3}\times 2$) unverträglich sind.

h) $\vec{x}^\mathsf{T}\vec{y}=(3 \quad 2)\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=0$ (Das ist das Skalarprodukt von $\vec{x}$ und $\vec{y}$.)

i) $\vec{x}\vec{y}^\mathsf{T}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}(0 \quad 0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$