Aufgabe 6.51

Beweisen Sie die Ungleichungen:

a) $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, b) $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$, c) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2$.

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung:

a) $0 \leq (x-y)^2 \implies 2xy \leq x^2+y^2 \implies (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$

oder Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)^2 \leq \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$

Das Gleichheitszeichen gilt, wenn die beiden Vektoren parallel sind, also für $x=y$.

b) Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)^2 \leq \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$

Das Gleichheitszeichen gilt für $x=y=z$.

c) Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\\cdot\\\cdot\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\\cdot\\x_n\end{pmatrix}\right)^2 \leq \left(\begin{pmatrix}1\\1\\\cdot\\\cdot\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\\cdot\\\cdot\\1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\\cdot\\x_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\\cdot\\x_n\end{pmatrix}\right)$

Das Gleichheitszeichen gilt für $x_1=x_2=\ldots=x_n$.