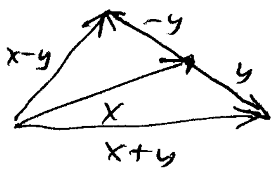
Aufgabe 6.50

a) Leiten Sie durch Quadrieren der Dreiecksungleichung für $\vec{x}+\vec{y}$ und $\vec{x}-\vec{y}$ die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung her!

b) Überzeugen Sie sich für die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ von der Gültigkeit der Ungleichungen!

Lösung:



a) **Dreiecksungleichung:** $\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

$\|\vec{x}-\vec{y}\| = \|\vec{x}+(-\vec{y})\| \le \|\vec{x}\|+\|-\vec{y}\| \le \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \le \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$ (zu zeigen)

$$\left.\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &\le \|\vec{x}\|^2+2\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|+\|\vec{y}\|^2 \\ \|\vec{x}+\vec{y}\| &= \sqrt{(\|\vec{x}+\vec{y}\|)(\|\vec{x}+\vec{y}\|)} \\ \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= \vec{x}\cdot\vec{x}+\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{y}\cdot\vec{x}+\vec{y}\cdot\vec{y} \\ &= \|\vec{x}\|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\|\vec{y}\|^2 \end{aligned}\right\} \|\vec{x}\|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\|\vec{y}\|^2 \le \|\vec{x}\|^2+2\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|+\|\vec{y}\|^2,\ \ \vec{x}\cdot\vec{y} \le \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$$

$$\left.\begin{aligned} \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 &\le \|\vec{x}\|^2+2\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|+\|\vec{y}\|^2 \\ \|\vec{x}-\vec{y}\| &= \sqrt{(\|\vec{x}-\vec{y}\|)(\|\vec{x}-\vec{y}\|)} \\ \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 &= \vec{x}\cdot\vec{x}-\vec{x}\cdot\vec{y}-\vec{y}\cdot\vec{x}+\vec{y}\cdot\vec{y} \\ &= \|\vec{x}\|^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}+\|\vec{y}\|^2 \end{aligned}\right\} \|\vec{x}\|^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}+\|\vec{y}\|^2 \le \|\vec{x}\|^2+2\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|+\|\vec{y}\|^2,\ \ -\vec{x}\cdot\vec{y} \le \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$$

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = \begin{cases} \vec{x}\cdot\vec{y}, & \vec{x}\cdot\vec{y} \ge 0 \\ -\vec{x}\cdot\vec{y}, & \vec{x}\cdot\vec{y} < 0 \end{cases}$$

In jedem Falle folgt $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \le \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$, w.z.b.w.

b) $$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}\right\| = 3\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| = 3\sqrt{17} \approx 12{,}37$$

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| = \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}71$$

$$\|\vec{x}\| = \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{9} = 3, \qquad \|\vec{y}\| = \left\|\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \approx 9{,}49$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = 14+5+8 = 27$$

$\|\vec{x}+\vec{y}\| \approx 12{,}37 \le 12{,}49 \approx \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$, $\qquad \|\vec{x}-\vec{y}\| \approx 6{,}71 \le 12{,}49 \approx \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = 27 \le 28{,}46 \approx \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$