

### Aufgabe 6.49

Für Vektoren  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung  $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ .

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Ungleichung und dem Wertebereich des Kosinus? Wann ist die Ungleichung mit dem Gleichheitszeichen erfüllt?
- Erläutern Sie die Ungleichung anhand der maximal möglichen Arbeit, die eine Kraft vom Betrag  $F$  in Abhängigkeit von ihrer Wirkungsrichtung in eine vorgegebene Richtung  $\vec{s}$  verrichten kann!

#### Lösung:

- a) Wegen  $\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$  ist  $\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$ . Die Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist (für  $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ ) somit gleichbedeutend zu  $|\cos \varphi| = \frac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \leq 1$ , d.h. zu  $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$ .

$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$  ist dabei äquivalent zu  $|\cos \varphi| = 1$  und damit zu  $\varphi = 0$  oder  $\pi$ . Das ist dann der Fall, wenn  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ist somit genau dann mit dem Gleichheitszeichen erfüllt, wenn die Vektoren Vielfache voneinander sind.

- b) Für die Arbeit gilt  $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ . Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung  $|\vec{F} \cdot \vec{s}| \leq \|\vec{F}\| \|\vec{s}\|$  besagt dann, dass für konstanten Betrag  $F = \|\vec{F}\|$  die Arbeit betragsmäßig am größten wird, wenn sie in oder entgegengesetzt zur vorgegebenen Richtung  $\vec{s}$  wirkt. Die maximal mögliche Arbeit wird dann verrichtet, wenn  $\vec{F}$  und  $\vec{s}$  gleich gerichtet sind, in diesem Falle gilt  $W = \|\vec{F}\| \|\vec{s}\|$ .