Aufgabe 6.47

Ein Körper wird durch eine Kraft $\vec{F} = (5 \quad 5 \quad 0)^{\mathsf{T}}$ vom Punkt $(4, 1, -2)$ zum Punkt $(4, 4, 1)$ bewegt.

a) Bestimmen Sie den Betrag der Kraft, die Länge des zurückgelegten Weges sowie die bei der Bewegung von der Kraft an dem Körper verrichtete Arbeit!
b) Zerlegen Sie die Kraft in eine Komponente in Bewegungsrichtung und in eine dazu orthogonale Komponente!
c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen Kraft- und Bewegungsrichtung!

Lösung:

a) Kraft: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{F}\| = 5 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \underline{\underline{5\sqrt{2}}}$

Weg: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{s}\| = 3 \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$

Arbeit: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{15}}$

b) Die Bewegungsrichtung kann auch durch den dazu proportionalen Vektor $\vec{\tilde{s}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ charakterisiert werden.

Sind $\vec{F}_s$ und $\vec{F}_o$ die Komponenten der Kraft in Bewegungsrichtung und orthogonal dazu, so gilt $\vec{F}_s = t\vec{\tilde{s}}$ und $\vec{F}_o = \vec{F} - \vec{F}_s = \vec{F} - t\vec{\tilde{s}}$. Da $\vec{F}_o$ zu $\vec{s}$ orthogonal ist, gilt $(\vec{F} - t\vec{\tilde{s}}) \cdot \vec{\tilde{s}} = \vec{F} \cdot \vec{\tilde{s}} - t\vec{\tilde{s}} \cdot \vec{\tilde{s}} = 0$.

Daraus folgt $t = \dfrac{\vec{F} \cdot \vec{\tilde{s}}}{\vec{\tilde{s}} \cdot \vec{\tilde{s}}} = \dfrac{\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \dfrac{5}{2}$.

Folglich ist $\vec{F}_s = \dfrac{5}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ die Kraftkomponente in Bewegungsrichtung und

$\vec{F}_o = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{5}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{5}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ die dazu orthogonale Komponente.

(Mithilfe der Kraftkomponente in Bewegungsrichtung kommt man wie bei a) für die Arbeit auf $W = \|\vec{F}_s\| \, \|\vec{s}\| = \dfrac{5}{2}\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 15$.)

c) $$\sphericalangle(\vec{F},\vec{s}) = \sphericalangle(\vec{\tilde{F}},\vec{\tilde{s}}) = \arccos \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Somit bilden Kraft- und Bewegungsrichtung einen Winkel von 60°.