Aufgabe 6.46

Ein Körper wird durch eine Kraft $\vec{F} = (3 \quad 4 \quad 5)^{\mathsf{T}}$ vom Punkt $(8,2,-3)$ zum Punkt $(5,8,3)$ bewegt.

a) Zerlegen Sie die Kraft in eine Komponente in Bewegungsrichtung und in eine dazu orthogonale Komponente!
b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen Kraft- und Bewegungsrichtung!
c) Bestimmen Sie die bei der Bewegung von der Kraft an dem Körper verrichtete Arbeit!

Lösung:

a) Weg: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Die Bewegungsrichtung kann auch durch den dazu proportionalen Vektor $\vec{\tilde{s}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ charakterisiert werden.

Sind $\vec{F}_s$ und $\vec{F}_o$ die Komponenten der Kraft in Bewegungsrichtung und orthogonal dazu, so gilt $\vec{F}_s = t\vec{\tilde{s}}$ und $\vec{F}_o = \vec{F} - \vec{F}_s = \vec{F} - t\vec{\tilde{s}}$. Da $\vec{F}_o$ zu $\vec{\tilde{s}}$ orthogonal ist, gilt $(\vec{F} - t\vec{\tilde{s}}) \cdot \vec{\tilde{s}} = 0$. Daraus folgt

$$t = \frac{\vec{F} \cdot \vec{\tilde{s}}}{\vec{\tilde{s}} \cdot \vec{\tilde{s}}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

Folglich ist $\vec{F}_s = \frac{5}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ die Kraftkomponente in Bewegungsrichtung und

$\vec{F}_o = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ die dazu orthogonale Komponente.

b) $$\sphericalangle(\vec{F}, \vec{s}) = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \arccos \frac{15}{\sqrt{50}\sqrt{9}} = \arccos \frac{5 \cdot 3}{\sqrt{2} \cdot 5 \cdot 3} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

c) $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 45$ **oder** $W = \|\vec{F}_s\| \, \|\vec{s}\| = \frac{5}{3} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| 3 \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 45$