

### Aufgabe 6.44

Orthogonalisieren Sie das Vektorsystem  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ , d.h., bestimmen Sie ein or-

thogonales Vektorsystem, dessen lineare Hülle mit der des gegebenen Vektorsystems übereinstimmt!

**Hinweis:** Lassen Sie z.B. den Vektor  $\vec{x}_1$  unverändert und suchen Sie einen dazu orthogonalen Vektor in der Form  $\vec{x}_2' = \vec{x}_2 - \lambda \vec{x}_1$ , d.h., bestimmen Sie  $\lambda$  so, dass  $\vec{x}_1$  und  $\vec{x}_2'$  zueinander orthogonal werden! Dieses Verfahren heißt Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren.

### Lösung:

Lassen  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  unverändert und bestimmen  $\vec{x}_2'$  so, dass  $\vec{x}_2' = \vec{x}_2 - \lambda \vec{x}_1$  und  $\vec{x}_2' \cdot \vec{x}_1 = 0$  gilt

(Orthogonalität). Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} \left( \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7-2\lambda \\ 5-\lambda \\ -4+2\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2(7-2\lambda) + 5 - \lambda - 2(-4+2\lambda) \\ &= -9\lambda + 27 = 0 \implies \lambda = 3, \quad \vec{x}_2' = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die orthogonalen Vektoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  spannen die gleiche Ebene auf wie die Vektoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ .