Aufgabe 6.43

Ermitteln Sie eine orthogonale Basis des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ mit üblichem Skalarprodukt, der der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ angehört!

Lösung:

Offensichtlich ist z.B. der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal zu dem gegebenen Vektor. Dabei wurde eine Komponente zu 0 gewählt, damit die Bestimmung eines zu den nunmehr vorhandenen zwei Vektoren orthogonalen Vektors leicht möglich ist. Zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist nämlich jeder Vektor $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit einem beliebigen Paramter a orthogonal. Um Orthogonaliät auch zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu erreichen, muss man $a = 13$ wählen. Somit ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ eine Orthogonalbasis.

Einen zu zwei Vektoren orthogonalen Vektor kann man auch mit dem Kreuzprodukt bestimmen.