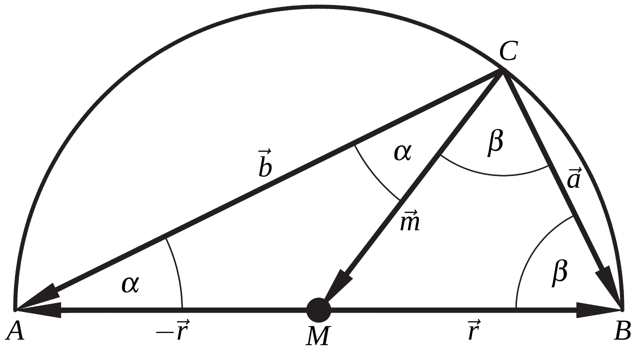
Aufgabe 6.41

Beweisen Sie den Satz des Thales **sowohl** durch Zerlegung des Dreiecks am Halbkreis in zwei gleichschenklige Dreiecke **als auch** mit Mitteln der Vektorrechnung!

Lösung:



Die Dreiecke *AMC* und *BMC* sind gleichschenklig, also sind bei ihnen die Winkel bei *A* und *C* (bezeichnet mit α) bzw. bei *B* und *C* (bezeichnet mit β) gleich. Somit ist im Dreieck *ABC* der Winkel über dem Durchmesser gleich der Summe der beiden anderen Winkel. Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ist der Winkel über dem Durchmesser also ein rechter Winkel, qed.

Es gilt $\vec{a}=\vec{m}+\vec{r}$ und $\vec{b}=\vec{m}-\vec{r}$.

Folglich ist $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{m}+\vec{r})(\vec{m}-\vec{r})=\vec{m}\cdot\vec{m}-\vec{m}\cdot\vec{r}+\vec{m}\cdot\vec{r}-\vec{r}\cdot\vec{r}=\vec{m}\cdot\vec{m}-\vec{r}\cdot\vec{r}=\|\vec{m}\|^2-\|\vec{r}\|^2=0$.
Somit sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal und der Winkel über dem Durchmesser ist ein rechter Winkel, qed.

(Der Schluss beim vektoriellen Beweis gilt auch umgekehrt, vgl. Aufgabe 6.34, so dass damit auch die Umkehrung des Satzes des Thales bewiesen ist: Bei einem in einen Kreis einbeschriebenen rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse Durchmesser des Kreises.)