Aufgabe 6.40

Zeigen Sie, dass die Koordinaten eines Vektors der Länge 1 bezüglich einer orthonormalen Basis gleich den Kosinussen der Winkel zwischen dem Vektor und den Basisvektoren sind, und damit $\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i = 1$ als Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ gilt!

Lösung:

Als Orthonormalbasis wird eines Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren der Länge 1 bezeichnet, wie das z.B. für die kanonische Basis der Fall ist.

Sei $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ eine Orthonormalbasis. Dann gilt $\vec{e}_i \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

Sei nun $\vec{x}$ ein Vektor der Länge 1, d.h. $\|\vec{x}\| = 1$, und $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$ seine Darstellung in der Orthonormalbasis. Dann gilt $\vec{x}\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i \vec{e}_j = \lambda_j \vec{e}_j \vec{e}_j = \lambda_j$ und damit $\cos \alpha_i = \dfrac{\vec{x}\vec{e}_i}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{e}_i\|} = \vec{x}\vec{e}_i = \lambda_i$.
Folglich ist $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \cos \alpha_i \vec{e}_i$ und schließlich

$1 = \|\vec{x}\|^2 = \vec{x}\vec{x} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \cos \alpha_i \vec{e}_i \right) \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \cos \alpha_i \vec{e}_i \right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \cos \alpha_i \cos \alpha_j \vec{e}_i \vec{e}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \cos \alpha_i^2 \vec{e}_i \vec{e}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \cos \alpha_i^2$,
w.z.b.w.