

Aufgabe 6.38

Als Kugel mit dem Radius r wird die Menge aller Punkte des Raumes bezeichnet, deren Ortsvektoren \vec{x} vom Punkt mit dem Ortsvektor \vec{x}_0 den Abstand r haben! Geben Sie die Gleichung der Kugel vektoriell und komponentenweise an! Welcher Zusammenhang besteht zum Satz des Pythagoras?

Lösung:

$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| = r, \quad (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = r^2, \text{ d.h.}$$

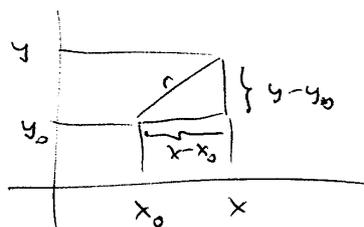
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

In der Ebene reduziert sich die Beziehung auf

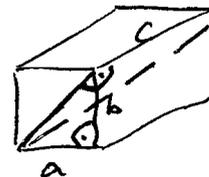
$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2:$$

Satz des Pythagoras

(Die Kugel in der Ebene ist ein Kreis.)



Auch im Raum entspricht die oben notierte Beziehung dem Satz des Pythagoras: Das Quadrat der Raumdiagonale eines Quaders ist gleich der Summe der Quadrate der Kantenlängen des Quaders (Mehrfachanwendung des ebenen Satzes des Pythagoras).



Analoges gilt auch für höhere Dimensionen.