Aufgabe 6.36

Berechnen Sie die Längen der Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und die Winkel zwischen diesen Vektoren! Was stellen Sie fest?

Lösung:

$$\|\vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13,$$

$$\left\|\vec{b}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3}\cdot\sqrt{144+9+16} = 13\sqrt{3},$$

$$\|\vec{c}\| = \left\| \begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+72\sqrt{3}+144\cdot 3+16+24\sqrt{3}+9\cdot 3+144-96\sqrt{3}+16\cdot 3} = \sqrt{169\cdot 4} = 13\cdot 2 = 26$$

$$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\|} = \arccos 0 = 90^\circ \quad (\text{Skalarprodukt } 0 \iff \text{orthogonal}),$$

$$\sphericalangle(\vec{b},\vec{c}) = \arccos\frac{\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\|} = \arccos\frac{-169\cdot 3}{13\sqrt{3}\cdot 26} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150^\circ,$$

$$\sphericalangle(\vec{c},\vec{a}) = \arccos\frac{\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}\right\|} = \arccos\frac{-169}{26\cdot 13} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

Offensichtlich gilt $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Also bilden die drei gegebenen Vektoren ein Dreieck. Dieses ist rechtwinklig. Die berechneten Winkel sind seine Außenwinkel, ihre Summe ist 360°.