

Aufgabe 6.32

- a) Wie kann der Winkel zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren im Raum \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) allgemein definiert werden? Welche Werte kann der so definierte Winkel annehmen?
- b) Die in a) anzugebende Definition kann auch im \mathbb{R}^1 , d.h. in der Menge der reellen Zahlen, angewendet werden. Begründen Sie, welche Werte der so definierte Winkel zwischen zwei von Null verschiedenen reellen Zahlen annehmen kann!

Lösung:

a) $\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$. Der Winkel kann zwischen je einschließlich 0 und $\pi \hat{=} 180^\circ$ liegen (Wertebereich des Arkuskosinus).

b) Im \mathbb{R}^1 gilt $\|\vec{x}\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2} = |x|$. Der Ausdruck $\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \frac{xy}{|x| |y|}$ ist gleich 1 oder -1 je nachdem, ob x und y gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Wegen $\arccos 1 = 0$ und $\arccos -1 = \pi$ kann der Winkel deshalb die Werte 0 und $\pi \hat{=} 180^\circ$ annehmen.