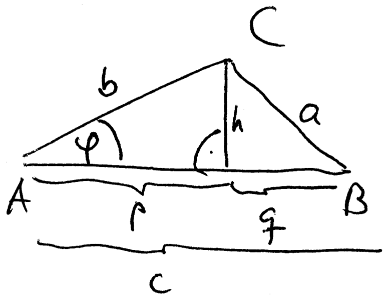
Aufgabe 6.31

Beweisen Sie mithilfe des Satzes des Pythagoras den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie und zeigen Sie damit, dass sich der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ durch die Beziehung $\varphi = \arccos \frac{\vec{x}_1\vec{x}_2}{\|\vec{x}_1\|\,\|\vec{x}_2\|}$ berechnen lässt, wobei das Skalarprodukt wie üblich durch $\vec{x}_1\vec{x}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ definiert ist!

Lösung:

Wir zeigen den Kosinussatz zunächst für spitze Winkel $(0 < \varphi < \pi/2)$.



Nach dem Satz des Pythagoras gilt $h^2 = b^2 - p^2 = a^2 - q^2$.

Ferner ist $\cos\varphi = \frac{p}{b}$, $p = b\cos\varphi$, $q = c - b\cos\varphi$.

$b^2 - (b\cos\varphi)^2 = a^2 - (c - b\cos\varphi)^2$

$b^2 - b^2\cos^2\varphi = a^2 - c^2 + 2bc\cos\varphi - b^2\cos^2\varphi$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi}$ (Kosinussatz)

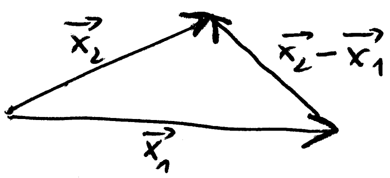
Für rechte Winkel $(\varphi = \pi/2)$ gilt wegen $\cos\varphi = 0$ nach dem Satz des Pythagoras
$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi$.

Für stumpfe Winkel $(\pi/2 < \varphi < \pi)$ ergibt sich $p = -b\cos\varphi$, $q = c + p = c - b\cos\varphi$, so dass das Einsetzen in $b^2 - p^2 = a^2 - q^2$ zum selben Ergebnis führt wie bei spitzen Winkeln.

Für gestreckte Winkel $(\varphi = \pi)$ ergibt sich wegen $\cos\varphi = -1$ nach der binomischen Formel
$a^2 = (b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi$

Im Falle $\varphi = 0$ ergibt sich schließlich wegen $\cos\varphi = 1$ ebenfalls nach der binomischen Formel
$a^2 = (b-c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi$.

Somit ist der Kosinussatz für alle Winkel $0 \le \varphi \le \pi$ bewiesen.



$$\begin{aligned}
\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|^2 &= (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\\
&= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\\
&= x_2^2 + x_1^2 + y_2^2 + y_1^2 + z_2^2 - z_1^2 - 2x_2x_1 - 2y_2y_1 - 2z_2z_1\\
&= \|\vec{x}_2\|^2 + \|\vec{x}_1\|^2 - 2\vec{x}_2\vec{x}_1
\end{aligned}$$

Andererseits gilt nach dem Kosinussatz $\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|^2 = \|\vec{x}_2\|^2 + \|\vec{x}_1\|^2 - 2\|\vec{x}_2\|\,\|\vec{x}_1\|\cos\varphi$ und damit
$\vec{x}_2\vec{x}_1 = \|\vec{x}_2\|\,\|\vec{x}_1\|\cos\varphi$, $\varphi = \arccos \frac{\vec{x}_1\vec{x}_2}{\|\vec{x}_1\|\,\|\vec{x}_2\|}$, w.z.b.w.

Wertebereich des Arkuskosinus ist das Intervall $[0, \pi]$. Man erhält (außer bei gleich- oder entgegengesetzt gerichteten Vektoren) in jedem Falle den kleineren der von den beiden Vektoren gebildeten Winkel.