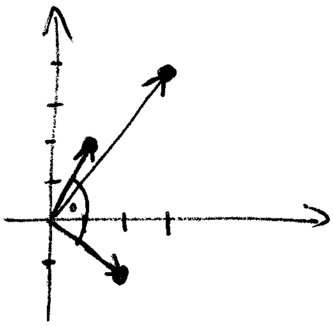
Aufgabe 6.30

Gegeben seien die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie die Vektoren grafisch dar!
b) Berechnen Sie die Skalarprodukte zwischen den Vektoren! Welche der Vektoren sind zueinander orthogonal?
c) Berechnen Sie die Normen der Vektoren und normieren Sie die Vektoren (d.h., bestimmen Sie Vektoren gleicher Richtung der Norm 1)!

Lösung:

a) 

Richtungsvektoren:
Beginn nicht fixiert,
d.h. beliebig parallel verschiebbar

b) **Skalarprodukt (inneres Produkt)** von 2 Vektoren $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$: $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{x}^{\mathsf{T}}\vec{y}\in\mathbb{R}$,

$$\text{d.h. } \vec{x}\cdot\vec{y}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\dots\\y_n\end{pmatrix}=(x_1\ \ x_2\ \ \dots\ \ x_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\dots\\y_n\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

Der Punkt für das Skalarprodukt wird häufig auch weggelassen. Das Produkt von zwei Spaltenvektoren ist dann nicht im Sinne der Matrizenmultiplikation, sondern im Sinne des Skalarprodukts zu verstehen.

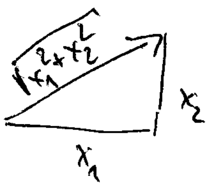
$\vec{x},\vec{y}$ orthogonal $\iff$ $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=0$, orthogonal

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=11$, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=2$, jeweils nicht orthogonal

c) **Betrag, Länge oder euklidische Norm:**

$\|\vec{x}\|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$



Satz des Pythagoras

Ein Vektor wird normiert, indem er durch seine eigene Länge geteilt wird.

$\left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$, Länge: $\sqrt{5}$, normiert: $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ Länge: 1

$\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$, Länge: $\sqrt{5}$, normiert: $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ Länge: 1

$\left\|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{9+16}=5$, Länge: $\sqrt{5}$, normiert: $5\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\end{pmatrix}$ Länge: 1