Rolf Haftmann: Aufgabensammlung zur Höheren Mathematik mit ausführlichen Lösungen (Hinweise zu den Quellen für die Aufgaben)

Aufgabe 6.29

Sei L ein linearer Vektorraum, $\vec{x}, \vec{y} \in L$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \beta \vec{x} + \alpha \vec{y}$ genau dann gilt, wenn $\alpha = \beta$ oder $\vec{x} = \vec{y}$ ist!

Lösung:

Nach den Distributivgesetzen (s. z.B. bei Aufgabe 6.25) ist die Beziehung $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \beta \vec{x} + \alpha \vec{y}$ äquivalent zu $(\alpha - \beta)(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$ (Nullvektor).

Ist
$$\alpha = \beta$$
 oder $\vec{x} = \vec{y}$, so ist $\alpha - \beta = 0$ oder $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$ und damit $(\alpha - \beta)(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$.

Ist umgekehrt $(\alpha - \beta)(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$, so folgt im Falle $\alpha - \beta \neq 0$, dass $\vec{x} - \vec{y} = \frac{1}{\alpha - \beta}(\alpha - \beta)(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$ gilt. Damit gilt auf jeden Fall eine der beiden Beziehungen $\alpha = \beta$ oder $\vec{x} = \vec{y}$, so dass der Beweis erbracht ist.