Aufgabe 6.29

Sei L ein linearer Vektorraum, $\vec{x}, \vec{y} \in L$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\beta\vec{x}+\alpha\vec{y}$ genau dann gilt, wenn $\alpha=\beta$ oder $\vec{x}=\vec{y}$ ist!

Lösung:

Nach den Distributivgesetzen (s. z.B. bei Aufgabe 6.25) ist die Beziehung $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\beta\vec{x}+\alpha\vec{y}$ äquivalent zu $(\alpha-\beta)(\vec{x}-\vec{y})=\vec{0}$ (Nullvektor).

Ist $\alpha=\beta$ oder $\vec{x}=\vec{y}$, so ist $\alpha-\beta=0$ oder $\vec{x}-\vec{y}=\vec{0}$ und damit $(\alpha-\beta)(\vec{x}-\vec{y})=\vec{0}$.

Ist umgekehrt $(\alpha-\beta)(\vec{x}-\vec{y})=\vec{0}$, so folgt im Falle $\alpha-\beta\neq 0$, dass $\vec{x}-\vec{y}=\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)(\vec{x}-\vec{y})=\vec{0}$ gilt. Damit gilt auf jeden Fall eine der beiden Beziehungen $\alpha=\beta$ oder $\vec{x}=\vec{y}$, so dass der Beweis erbracht ist.