## Aufgabe 6.28

Zeigen Sie, dass die Menge aller quadratisch summierbaren Folgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, d.h. der Folgen mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} {a_n}^2 < \infty$, mit den Operationen $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$ und $\lambda\{a_n\}=\{\lambda a_n\}$ einen linearen Vektorraum bildet!

## Lösung:

Es ist zu zeigen, dass die Operationen $+$ und $\cdot$ nicht aus der Menge der quadratisch summierbaren Funktionen herausführen und die für den linearen Raum geforderten Eigenschaften (s. z.B. bei Aufgabe 6.25) erfüllen.

Operation $+$ führt nicht aus der Menge hinaus:
$(a_n+b_n)^2 = a_n^2+2a_nb_n+b^2 \le 2{a_n}^2+2{b_n}^2$, aus $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{a_n}^2<\infty$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{b_n}^2<\infty$ folgt daher $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)^2<\infty$.
(Wegen $0 \le (a_n-b_n)^2 = a_n^2-2a_nb_n+b_n^2$ ist nämlich $2a_nb_n \le a_n^2+b_n^2$.)

Operation $\cdot$ führt nicht aus der Menge hinaus:
$(\lambda a_n)^2 = \lambda^2 {a_n}^2$, $\lambda^2$ aus Summe herausziehen, aus $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{a_n}^2<\infty$ folgt daher $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)^2<\infty$.

Operation $+$: Kommutativität und Assoziativität sind offensichtlich,
Nullelement: $\{0\}_{n=0}^{\infty}$,
inverses Element: $\{-a_n\}$;
Operation $\cdot$ : Assoziativität offensichtlich,
$1\cdot\{-a_n\}=\{-a_n\}$,
beide Distributivitäten mit $+$ offensichtlich