## Aufgabe 6.27

Sei $P_2$ der lineare Raum aller Parabeln über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mit einem Skalar.

a) Geben Sie die Dimension von $P_2$ an!
b) Welcher der Vektoren $2x+11x^2$ und $2x+12x^2$ ist Linearkombination der Vektoren $2+4x+3x^2$ und $3+5x-x^2$ ?
c) Welches der beiden Vektorsysteme $\{2+4x+3x^2, 3+5x-x^2, 2x+11x^2\}$ und $\{2+4x+3x^2, 3+5x-x^2, 2x+12x^2\}$ ist linear unabhängig, wann handelt es sich um eine Basis des $P_2$?

## Lösung:

a) $\{1, x, x^2\}$ ist eine Basis des $P_2$, die Dimension ist also 3.

b) Der Vektor $2x+11x^2$ ist Linearkombination der Vektoren $2+4x+3x^2$ und $3+5x-x^2$, wenn $2x+11x^2 = \alpha(2+4x+3x^2)+\beta(3+5x-x^2) = (2\alpha+3\beta)+(4\alpha+5\beta)x+(3\alpha-\beta)x^2$ gilt. Da Polynome genau dann gleich sind, wenn sie in allen Koeffizienten übereinstimmen, muss $2\alpha+3\beta=0,\ 4\alpha+5\beta=2,\ 3\alpha-\beta=11$ sein. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist aus Aufgabe 6.16a) bekannt: $\alpha=3,\ \beta=-2$.

Es gilt $2x+11x^2 = 3(2+4x+3x^2)-2(3+5x-x^2)$, d.h. $2x+11x^2$ ist Linearkombination der beiden Vektoren.

Entsprechend Aufgabe 6.16c) kann dann $2x+12x^2$ keine Linearkombination der beiden Vektoren sein.

c) Entsprechend Aufgabe 6.16b) ist $\{2+4x+3x^2, 3+5x-x^2, 2x+11x^2\}$ linear abhängig und kann keine Basis sein.

Entsprechend Aufgabe 6.16d) ist $\{2+4x+3x^2, 3+5x-x^2, 2x+12x^2\}$ linear unabhängig. Da es sich um 3 linear unabhängige Vektoren eines 3–dimensionalen Raumes handelt, ist das Vektorsystem eine Basis.