Aufgabe 6.26

Zeigen Sie, dass die Menge P aller Polynome über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mit einem Skalar ein linearer Vektorraum ist! Was kann man zu diesem Raum bezüglich Dimension und Basis aussagen?

Lösung:

Die Menge P besteht aus allen Polynomen $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, \ldots, n$. n ist dabei eine beliebige nichtnegative ganze Zahl, der Grad des Polynoms.

Offensichtlich ist die Summe zweier Polynome wieder ein Polynom. Der Grad dieses Polynoms ist maximal $\max(n_1, n_2)$, er kann auch kleiner sein, wenn sich bei Polynomen gleichen Grades Terme mit den höchsten Potenzen gegenseitig aufheben. Jedenfalls ist er wieder ein Polynom. Ebenso ist das Produkt des Polynoms einem Skalar λ wieder ein Polynom.

Die übliche Addition und Multiplikation mit einem Skalar führen also nicht aus P heraus. Ebenso ist das Erfülltsein der Eigenschaften 1.–2. und 5.–8. offensichtlich. Weiterhin ist $\Theta(x) \equiv 0 \in P$ das neutrale und $-p(x) = \sum_{i=0}^{n} (-a_i) x^i$ das zu $p(x)$ inverse Element, so dass auch die Eigenschaften 3. und 4. erfüllt sind und P ein Vektorraum ist.

Analog zu $\{1, x, x^2, x^3\}$ in P_3 kann man zeigen, dass das System $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$ für beliebiges n linear unabhängig ist. Es gibt also unendlich viele linear unabhängige Vektoren, folglich ist $\dim P = \infty$.

Im Sinne der Definition gibt es keine Basis. Wenn man will, kann man aber für den Raum P das System $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ als Basis mit unendlich vielen Elementen verstehen. Eine solche „Basis“ kann aber nicht für alle Vektorräume angegeben werden, die keine endliche Dimension besitzen.