Aufgabe 6.25

Zeigen Sie, dass die Menge P_3 aller Polynome 3. Grades über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mit einem Skalar ein linearer Vektorraum ist und geben Sie eine Basis dieses Vektorraumes an!

Lösung:

Eine Menge L heißt mit den Operationen $+$ und $\cdot$ **linearer Raum** oder **Vektorraum**, wenn

$\forall x,y \in L:\ x+y \in L$ (Summe gehört zum Raum),
$\forall x \in L,\ \alpha \in \mathbb{R}:\ \alpha x \in L$ (Produkt mit Skalar gehört zum Raum)

und für die Operationen folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1.	$x+y=y+x$	Kommutativität
2.	$x+(y+z)=(x+y)+z$	Assoziativität
3.	$\exists\Theta\in L$ mit $x+\Theta=x\ \forall x$	Neutrales Element
4.	$\forall x\in L\ \ \exists(-x)\in L:\ \ x+(-x)=\Theta$	Inverses Element
		(damit auch Subtraktion eingeführt)

5. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$
6. $1x=x$
7. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
8. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x\\ \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y\end{array}\right\}\ \text{Distributivität}$$

Die Menge P_3 besteht aus allen Polynomen $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Wir zeigen zunächst, dass die Operationen $+$ und $\cdot$ nicht aus der Menge P_3 herausführen:

$$p_1(x)+p_2(x)=(a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1)+(a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2)$$
$$=(a_1+a_2)x^3+(b_1+b_2)x^2+(c_1+c_2)x+(d_1+d_2)\in P_3,\ \text{da}\ a_1+a_2\in\mathbb{R}\ \text{usw.},$$
$$\lambda p(x)=\lambda(ax^3+bx^2+cx+d)=\lambda ax^3+\lambda bx^2+\lambda cx+\lambda d\in\mathbb{R},\ \text{da}\ \lambda a\in\mathbb{R}\ \text{usw.}$$

Das Erfülltsein der Eigenschaften 1.–2. und 5.–8. ist offensichtlich, da mit der üblichen Addition und Multiplikation gearbeitet wird. Im Detail müsste man formulieren:

1. $p_1(x)+p_2(x)=p_2(x)+p_1(x)$, da $a_1+a_2=a_2+a_1$ usw.,
2. $p_1(x)+(p_2(x)+p_3(x))=(p_1(x)+p_2(x))+p_3(x)$, da $a_1+(a_2+a_3)=(a_1+a_2)+a_3$ usw.,
5. $\lambda(\mu p(x))=\lambda(\mu ax^3+\mu bx^2+\mu cx+\mu d)=(\lambda\mu ax^3+\lambda\mu bx^2+\lambda\mu cx+\lambda\mu d)=(\lambda\mu)p(x)$,
6. $1p(x)=1(ax^3+bx^2+cx+d)=ax^3+bx^2+cx+d=p(x)$,
7. $(\lambda+\mu)p(x)=\lambda p(x)+\mu p(x)$, da $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$ usw.,
8. $\lambda(p_1(x)+p_2(x))=\lambda p_1(x)+\lambda p_2(x)$, da $\lambda(a_1+a_2)=\lambda a_1+\lambda a_2$ usw.

Auch neutrales und inverses Element existieren offensichtlich:
$\Theta(x)=0x^3+0x^2+0x+0\in P_3$ ist neutrales Element, da $p(x)+\Theta(x)=p(x)\ \ \forall\ p(x)\in P_3$,
$-p(x)=-ax^3-bx^2-cx-d\in P_3$ ist inverses Element zu $p(x)\in P_3$,
da $p(x)+(-p(x))=\Theta(x)\equiv 0\ \ \forall p(x)\in P_3$.

Also ist P_3 ein linearer Vektorraum.

Als Basis bietet sich an, die 4 Funktionen $p_0(x)=1\ \ (a=b=c=0,d=1)$, $p_1(x)=x$, $p_2(x)=x^2$ und $p_3(x)=x^3$ zu untersuchen. Offensichtlich ist jedes Element von P_3 als Linearkombination dieser 4 Funktionen darstellbar, denn so ist ja P_3 gerade definiert. Wir müssen also nur noch die lineare Unabhängigkeit der 4 Funktionen zeigen:

Sei $\lambda_0+\lambda_1x+\lambda_2x^2+\lambda_3x^3=\Theta(x)=0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Einsetzen von $x=0$ liefert $\lambda_0=0$, also muss gelten $\lambda_1 x+\lambda_2 x^2+\lambda_3 x^3=0\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$ und damit $\lambda_1+\lambda_2 x+\lambda_3 x^2=0\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}, x\neq 0$ und $\lim\limits_{x\to 0}(\lambda_1+\lambda_2 x+\lambda_3 x^2)=\lambda_1=0$. Also gilt $\lambda_2 x+\lambda_3 x^2=0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. Durch Division durch x und Grenzübergang $x\to 0$ folgt analog $\lambda_2=0$ und damit $\lambda_3 x=0$, woraus durch Einsetzen von (z.B.) $x=1$ $\lambda_3=0$ folgt. Also gilt $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ und damit die lineare Unabhängigkeit der 4 Funktionen. Diese bilden somit eine Basis.

Dieses Ergebnis kann man auch durch dreimaliges Differenzieren und Einsetzen von $x=0$ in $\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2+\lambda_3 x^3=0$, $\lambda_1+2\lambda_2 x+3\lambda_3 x^2=0$, $2\lambda_2+6\lambda_3 x=0$ und $6\lambda_3=0$ oder durch Einsetzen von 4 Werten (zweckmäßigerweise $x=0,1,-1,2$) in $\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2+\lambda_3 x^3=0$ und Lösen des dadurch entstehenden linearen Gleichungssystems erhalten. Letzten Endes handelt es sich nur um einen Koeffizientenvergleich: Die Polynome $\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2+\lambda_3 x^3$ und $0+0x+0x^2+0x^3$ sind genau dann identisch, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen.