## Aufgabe 6.21

Gegeben sei die Menge $\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix},\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei der Menge um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ handelt!

b) Bestimmen Sie die Dimension dieses Unterraumes und geben Sie eine Basis des Unterraumes an!

c) Stellen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\0\\6\end{pmatrix}$ als Linearkombinationen dieser Basis dar, falls das möglich ist!

d) Was stellt die Menge geometrisch dar?

**Lösung:**

a) Es gilt
$$\left(\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\beta_1\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}+\gamma_1\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}\right)+\left(\alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}+\gamma_2\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}\right)$$
$$=\left((\alpha_1+\alpha_2)\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+(\beta_1+\beta_2)\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}+(\gamma_1+\gamma_2)\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}\right)$$
und $\lambda\left(\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}\right)=\left((\lambda\alpha)\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+(\lambda\beta)\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}+(\lambda\gamma)\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}\right)$.

Addition und Multiplikation mit einem Skalar führen also nicht aus der Menge heraus, so dass es sich bei der Menge um einen Unterraum handelt.

b) Wir untersuchen zunächst, ob die drei Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Sei hierzu $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, d.h.

$$\begin{array}{lll}
\lambda_1 \qquad +5\lambda_3=0 & \Longrightarrow\ \lambda_3=-\frac{1}{5}\lambda_1 & \\
2\lambda_1+\ \lambda_2+6\lambda_3=0 & & 2\lambda_1-\frac{4}{5}\lambda_1-\frac{6}{5}\lambda_1=0,\ \text{erfüllt für alle } \lambda_1\\
4\lambda_1+5\lambda_2 \qquad =0 & \Longrightarrow\ \lambda_2=-\frac{4}{5}\lambda_1 &
\end{array}$$

Für (z.B.) $\lambda_1=5$ gilt $5\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, die drei Vektoren sind nicht linear unabhängig.

Wegen $\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$ gilt

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}=(\alpha+5\gamma)\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+(\beta-4\gamma)\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}.$$

Jeder Vektor der gegebenen Menge ist also als Linearkombination der beiden Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$ darstellbar, diese beiden Vektoren sind offensichtlich linear unabhängig (Sonst müsste nämlich einer Vielfaches des anderen sein.). Somit ist (z.B.) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des Unterraumes und die Dimension des Unterraumes ist 2.

c) Für die unter b) angegebene Basis muss angesetzt werden: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{lll} 1 = \lambda_1 & \Longrightarrow \lambda_1 = 1 & \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_2 & \Longrightarrow \lambda_2 = -2\lambda_1 = -2 & \\ 6 = 4\lambda_1 + 5\lambda_2 & & \Longrightarrow 6 = 4 - 10, \text{ Widerspruch} \end{array}$$

und für den zweiten Vektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{lll} -1 = \lambda_1 & \Longrightarrow \lambda_1 = -1 & \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_2 & \Longrightarrow \lambda_2 = -2\lambda_1 = 2 & \\ 6 = 4\lambda_1 + 5\lambda_2 & & \Longrightarrow 6 = -4 + 10, \text{ erfüllt.} \end{array}.$$

Somit gilt $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, während $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ nicht zu dem Unterraum gehört.

d) Mit $\lambda = \alpha + 5\gamma$ und $\mu = \beta - 4\gamma$ handelt es sich um die Menge aller Vektoren

$$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

also um eine Ebene, die den Koordinatenursprung enthält.