Aufgabe 6.18

Handelt es sich bei folgenden Mengen um Unterräume des $\mathbb{R}^3$:

a) $\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$, b) $\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$, c) $\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\y\end{pmatrix}, x,y\in\mathbb{R}\right\}$, d) $\left\{\begin{pmatrix}x\\2x\\3x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$,

e) $\left\{\begin{pmatrix}x\\x+2\\x+3\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$, f) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$, g) $\left\{\begin{pmatrix}x\\2y\\3x+4y\end{pmatrix}, x,y\in\mathbb{R}\right\}$?

Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an! Was stellen die Mengen geometrisch dar?

Lösung:

a) $$\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$$

Es handelt sich um die lineare Hülle des Vektors $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, also handelt es sich um einen Unterraum. Die Dimension ist 1, Basis z.B. dieser Vektor. Bei der Menge handelt es sich um eine Gerade durch den Koordinatenursprung.

b) $$\begin{pmatrix}x_1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\0\\2\end{pmatrix} \notin \left\{\begin{pmatrix}x\\0\\1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$$

Da die Addition aus der Menge heraus führt, handelt es sich um keinen Unterraum. Bei der Menge handelt es sich um eine Gerade, die nicht durch den Koordinatenursprung geht.

c) $$\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\y\end{pmatrix}, x,y\in\mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

Es handelt sich um die lineare Hülle von zwei Vektoren, also handelt es sich um einen Unterraum. Da die beiden Vektoren linear unabhängig sind, ist die Dimension 2. Eine Basis wird z.B. von diesen beiden Vektoren gebildet: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Bei der Menge handelt es sich um eine Ebene durch den Koordinatenursprung.

d) $$\left\{\begin{pmatrix}x\\2x\\3x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$$

Es handelt sich um die lineare Hülle des Vektors $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, also handelt es sich um einen Unterraum. Die Dimension ist 1, Basis z.B. dieser Vektor. Bei der Menge handelt es sich um eine Gerade durch den Koordinatenursprung.

e) $$\begin{pmatrix}x_1\\x_1+2\\x_1+3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\x_2+2\\x_2+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\(x_1+x_2)+4\\(x_1+x_2)+6\end{pmatrix} \notin \left\{\begin{pmatrix}x\\x+2\\x+3\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$$

Da die Addition aus der Menge heraus führt, handelt es sich um keinen Unterraum. Bei der Menge handelt es sich um eine Gerade, die nicht durch den Koordinatenursprung geht.

f) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$

Es handelt sich um den $\mathbb{R}^3$ selbst. Dieser ist definitionsgemäß Unterraum von sich selbst. Die Dimension ist 3, Basis z.B. die kanonische Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

g) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Es handelt sich um die lineare Hülle von zwei Vektoren, also handelt es sich um einen Unterraum. Da die beiden Vektoren linear unabhängig sind, ist die Dimension 2. Eine Basis wird z.B. von diesen beiden Vektoren gebildet: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$. Bei der Menge handelt es sich um eine Ebene durch den Koordinatenursprung.