Aufgabe 6.17

Bestimmen Sie eine Basis der Menge $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} ,\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \right\}$. Was stellt die Menge geometrisch dar?

Lösung:

Wählt man $\alpha=1, \beta=\gamma=0$ bzw. $\beta=1, \alpha=\gamma=0$ oder $\gamma=1, \alpha=\beta=1$, so sieht man, dass die drei Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ zu der Menge gehören. Wir untersuchen zunächst, ob diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Sei hierzu $\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h.

$$\begin{array}{llll} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & = 0 & \Longrightarrow & \lambda_2 = -\frac{2}{3}\lambda_1 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 & \Longrightarrow & 2\lambda_3 = -4\lambda_1 - 5\lambda_2 = -4\lambda_1 + \frac{10}{3}\lambda_1 = -\frac{2}{3}\lambda_1,\ \lambda_3 = -\frac{1}{3}\lambda_1 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 11\lambda_3 & = 0 & & 3\lambda_1 - \lambda_2 + 11\lambda_3 = 3\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_1 - \frac{11}{3}\lambda_1 = 0, \text{ erfüllt für alle } \lambda_1 \end{array}$$

Für (z.B.) $\lambda_1=3$ gilt $3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, die drei Vektoren sind nicht linear unabhängig.

Wegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ gilt

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = (\alpha+3\gamma)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + (\beta-2\gamma)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Jeder Vektor der gegebenen Menge ist also als Linearkombination der beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ darstellbar, diese beiden Vektoren sind offensichtlich linear unabhängig (Sonst müsste nämlich einer Vielfaches des anderen sein.). Somit ist (z.B.) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des Unterraumes und die Dimension des Unterraumes ist 2. (Es wäre genauso möglich, zwei andere der drei gegebenen Vektoren als Basisvektoren auszuwählen oder die Basis aus anderen Linearkombinationen der gegebenen Vektoren zu konstruieren.)

Mit $\lambda = \alpha+3\gamma$ und $\mu = \beta-2\gamma$ handelt es sich um die Menge aller Vektoren

$$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix},$$

also um eine Ebene, die den Koordinatenursprung enthält.