Aufgabe 6.16

Sei $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie folgende Mengen darauf, ob es sich um lineare Räume handelt:

a) $\{\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \vec{x}_3,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$,
b) $\{\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma\vec{x}_3,\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$,
c) $\{\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \vec{x}_4,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$,
d) $\{\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma\vec{x}_4,\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$!

Wenn ja, geben Sie die Dimension und eine Basis an! Was stellen die Mengen geometrisch dar?

Lösung:

a) Es handelt sich um eine Ebene, die den Punkt $\vec{x}_3$ und die Richtungen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ enthält. Sie ist genau dann linearer Raum, wenn sie den Koordinatenursprung enthält (s. Aufgabe 6.11). Also muss es $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ geben, für die $\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2+\vec{x}_3=\vec{0}$ gilt (Das ist gleichbedeutend damit, dass $\vec{x}_3$ Linearkombination von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ ist.):

$$\begin{array}{lll} 2\alpha+3\beta \qquad = 0 & \longrightarrow\ \alpha = -\dfrac{3}{2}\beta & \\ 4\alpha+5\beta+\ 2 = 0 & & \longrightarrow\ -6\beta+5\beta+2=0,\ \beta=2,\ \alpha=-3 \\ 3\alpha-\ \beta+11=0 & & \quad 3\cdot(-3)-2+11=0,\ \text{stimmt} \end{array}$$

Also ist $\vec{0}=-3\vec{x}_1+2\vec{x}_2+\vec{x}_3$, das ist äquivalent zu $\vec{x}_3=3\vec{x}_1-2\vec{x}_2$.

Die Menge ist eine Ebene durch den Koordinatenursprung, sie ist ein linearer Raum mit der Dimension 2. Offensichtlich sind alle Elemente als Linearkombination von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ darstellbar, diese beiden Vektoren sind linear unabhängig. Also ist (z.B.) $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2\}$ eine Basis.

b) Offensichtlich ist die Menge ein linearer Raum.

$\big($Es gilt nämlich $(\alpha_1\vec{x}_1+\beta_1\vec{x}_2+\gamma_1\vec{x}_3)+(\alpha_2\vec{x}_1+\beta_2\vec{x}_2+\gamma_2\vec{x}_3)=(\alpha_1+\alpha_2)\vec{x}_1+(\beta_1+\beta_2)\vec{x}_2+(\gamma_1+\gamma_2)\vec{x}_3$ und $\lambda(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2+\gamma\vec{x}_3)=(\lambda\alpha)\vec{x}_1+(\lambda\beta)\vec{x}_2+(\lambda\gamma)\vec{x}_3$, die Summe von 2 Elementen und das Produkt eines Elementes mit einem Skalar gehört wieder zu der Menge.$\big)$

Aus a) ist bekannt, dass $\vec{x}_3=3\vec{x}_1-2\vec{x}_2$ gilt. Also ist $\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2+\gamma\vec{x}_3=\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2+\gamma(3\vec{x}_1-2\vec{x}_2)$ $=(\alpha+3\gamma)\vec{x}_1+(\beta-2\gamma)\vec{x}_2$. Damit ist $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2\}$ eine Basis des Raumes, die Dimension ist 2. Es handelt sich um die gleiche Ebene durch den Koordinatenursprung wie bei a).

c) Es handelt sich um eine Ebene, die den Punkt $\vec{x}_4$ und die Richtungen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ enthält. Sie ist genau dann linearer Raum, wenn sie den Koordinatenursprung enthält. Es entsteht dasselbe Gleichungssystem wie bei a), nur dass in der 3. Zeile statt der Zahl 11 die Zahl 12 steht. Aus den ersten beiden Zeilen erhält man wieder $\alpha=-3$, $\beta=2$, dann ist aber $3\alpha-\beta+12=1\neq 0$. Also ist das Gleichungssystem unlösbar, der Koordinatenursprung gehört nicht zu der Ebene.

Die Menge ist eine Ebene, die den Koordinatenursprung nicht enthält. Sie ist kein linearer Raum.

d) Analog zu b) liegt ein linearer Raum vor. Nach c) ist $\vec{x}_4$ von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ linear unabhängig, die beiden Vektoren sind auch untereinander linear unabhängig. Also sind $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_4$ drei linear unabhängige Vektoren und damit auch eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Die drei Vektoren spannen den gesamten Raum $\mathbb{R}^3$ auf.

Die Menge ist der Raum $\mathbb{R}^3$, die Dimension ist 3. Eine Basis ist z.B. $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_4\}$, man könnte aber auch die kanonische Basis verwenden.