Aufgabe 6.15

L_1 und L_2 seien zwei Unterräume des linearen Vektorraumes V. Zeigen Sie, dass dann auch $L_1 \cap L_2$ Unterraum von V ist!

Lösung:

Ist $\vec{x}, \vec{y} \in L_1 \cap L_2$, so gilt $\vec{x}, \vec{y} \in L_1$ und $\vec{x}, \vec{y} \in L_2$. Da L_1 und L_2 Unterräume von V sind, führen die Addition und die skalare Multiplikation nicht aus ihnen hinaus. Daher gilt $\vec{x}+\vec{y} \in L_1$ und $\vec{x}+\vec{y} \in L_2$ und damit $\vec{x}+\vec{y} \in L_1 \cap L_2$ sowie für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ auch $\alpha\vec{x} \in L_1$ und $\alpha\vec{x} \in L_2$ und damit $\alpha\vec{x} \in L_1 \cap L_2$. Also führen Addition und skalare Multiplikation auch aus $L_1 \cap L_2$ nicht hinaus, so dass es sich um einen Unterraum handelt.