Aufgabe 6.14

Beweisen Sie, dass jedes beliebige System von n linear unabhängigen Vektoren eines n-dimensionalen linearen Vektorraumes diesen Raum aufspannt, der Raum also lineare Hülle dieses Systems ist!

Lösung:

Jedes System linear unabhängiger Vektoren, das einen Vektorraum aufspannt, wird als Basis dieses Raumes bezeichnet. Es ist also zu zeigen, dass jedes beliebige System von n linear unabhängigen Vektoren eines n-dimensionalen linearen Raumes eines Basis dieses Raumes ist.

Indirekter Beweis:

$\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\} \subseteq V$ sei linear unabhängig, aber keine Basis des n-dimensionalen linearen Vektorraumes V. Dann gibt es einen Vektor $\vec{x}_{n+1} \in V$, der nicht als Linearkombination von $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ darstellbar ist. Sei nun $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}$. Wäre $\lambda_{n+1} \neq 0$, so könnte man die Gleichung nach $\vec{x}_{n+1}$ auflösen, $\vec{x}_{n+1}$ wäre somit als Linearkombination von $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ darstellbar. Also muss $\lambda_{n+1} = 0$ und damit $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}$ sein. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\}$ sind somit alle $\lambda_i = 0$, das Vektorsystem $\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{n+1}\}$ ist also linear unabhängig. Da die Dimension n die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren des Raumes ist, ist dies ein Widerspruch.