Aufgabe 6.11

Wann handelt es sich bei einer Ebene um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$?

Lösung:

Eine Ebene wird durch einen Orts- und zwei Richtungsvektoren bestimmt, d.h.
$E = \{\vec{x} : \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Ist die Ebene ein Unterraum, so muss insbesondere für jedes $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{x} \in E$ auch $\alpha\vec{x} \in E$ sein. Wählt man $\alpha = 0$, so erhält man $\vec{0} \in E$, die Ebene muss also den Koordinatenursprung enthalten und damit in der Form $\vec{x} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ darstellbar sein. Dabei handelt es sich um die lineare Hülle von zwei Vektoren, die offensichtlich Unterraum ist, da die Operationen $+$ und $\cdot$ nicht aus ihr hinausführen.

Also ist eine Ebene genau dann Unterraum, wenn sie den Koordinatenursprung enthält.