Aufgabe 6.8

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a die Dimension der linearen Hülle der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 14 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$! Was stellt diese Menge geometrisch dar?

b) Gehören die Vektoren $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ der linearen Hülle an?

Lösung:

a) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich voneinander linear unabhängig, so dass die Dimension der linearen Hülle mindestens 2 ist. In Abhängigkeit vom Parameter a muss nun noch ermittelt werden, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 14 \end{pmatrix}$ von diesen Vektoren linear abhängt:

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 3 & 2 & 14 \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & a \\ 3 & 2 & 14 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & a+\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{25}{2} \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & \frac{3}{2} & a+\frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & a+8 \\ \hline 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & a+8 \end{array}$$

Für $a \neq -8$ ist das homogene Gleichungssystem nur trivial lösbar, für $a=-8$ hat es die Lösung $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Für $a \neq -8$ sind die 3 Vektoren linear unabhängig und damit eine Basis des $\mathbb{R}^3$, ihre lineare Hülle hat die Dimension 3 und ist der gesamte Raum $\mathbb{R}^3$.

Für $a=-8$ ergibt sich $\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und als lineare Hülle

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (\alpha+5\beta) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + (\gamma-8\beta) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Koordinatenursprung, ihre Dimension ist 2.

b) Für $a \neq -8$ gehören alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$ und damit auch die beiden genannten zur linearen Hülle.

Für $a = -8$ ist noch zu ermitteln, ob die genannten Vektoren in der beschriebenen Ebene liegen:

$$\begin{array}{rr|rr} 2 & 3 & -10 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -10 & 5 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -10 & 5 \\ 3 & 2 & -10 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 20 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 20 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}$$

Im Falle $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ führt die Bestimmung der Koeffizienten auf den Widerspruch $0=10$, der Punkt liegt außerhalb der Ebene. Für $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ gilt hingegen $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, so dass der Punkt in der Ebene liegt, d.h. der Vektor der linearen Hülle angehört.