Aufgabe 6.7

a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$ Linearkombination, der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ hingegen keine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist!

b) Wie kann man aus den unter a) genannten Vektoren eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^3$ bilden? Geben Sie die Koordinaten der Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis an!

Lösung:

a) $$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rl} 3 = r & \\ 8 = 2r + s & \Longrightarrow \quad s = 2 \\ 17 = 3r + 4s & \text{stimmt für } r = 3,\ s = 2, \end{array}$$

also $$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$ Linearkombination.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rl} 2 = r & \\ 3 = 2r + s & \Longrightarrow \quad s = -1 \\ 1 = 3r + 4s & \text{nicht erfüllt wegen } 3r + 4s = 2, \end{array}$$

es gibt also keine Parameter r, s, die das erfüllen, somit keine Linearkombination.

b) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig. Jedes System von 3 linear unabhängigen Vektoren des $\mathbb{R}^3$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$. Also handelt es sich bei den 3 Vektoren um eine Basis.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ gilt offensichtlich für $r = 3$, $s = 2$, $t = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rl} 1 = r \qquad + 2t & r = 1 - 2t \\ 5 = 2r + s + 3t & s = 5 - 2r - 3t \\ & \quad = 5 - 2 + 4t - 3t = 3 + t \\ 16 = 3r + 4s + t & 16 = 3r + 4s + t \\ & \quad = 3 - 6t + 12 + 4t + t, \\ t = -1,\ r = 3,\ s = 2, & \text{also} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$