Aufgabe 6.6

Sei $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \vec{x}_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ \vec{x}_2=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\{\vec{i},\vec{j}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist! (Diese Basis wird „kanonische Basis“ genannt.)
b) Zeigen Sie, dass $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2\}$ keine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist!
c) Zeigen Sie, dass $\{\vec{i},\vec{x}_1\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist!
d) Zeigen Sie, dass es im $\mathbb{R}^2$ unendlich viele Basen gibt!
e) Zeigen Sie, dass $\dim\mathbb{R}^2=2$ gilt!

Lösung:

a) **Basis:** System linear unabhängiger Vektoren, durch das jeder Vektor des Raumes als Linearkombination darstellbar ist.

$$\lambda_1\vec{i}+\lambda_2\vec{j}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\implies\lambda_1,\lambda_2=0,\ \text{d.h. linear unabhängig,}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\implies\vec{x}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j},$$ also jedes $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ so darstellbar, d.h. Basis.

b) $$2\vec{x}_1+\vec{x}_2=2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$ Nullvektor ist nichttriviale LK, also linear abhängig, folglich keine Basis.

c) $$\lambda_1\vec{i}+\lambda_2\vec{x}_1=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1+2\lambda_2\\3\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\implies 3\lambda_2=0,\ \lambda_2=0,$$
$\lambda_1=0-2\lambda_2=0$, d.h. lin. unabhäng.,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1+2\lambda_2\\3\lambda_2\end{pmatrix}\implies 3\lambda_2=y,\ \lambda_2=y/3,$$
$\lambda_1=x-2\lambda_2=x-2y/3$,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(x-\frac{2y}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{y}{3}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},$$ also jedes $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ so darstellbar, d.h. Basis.

d) Analog zu $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$ ist **z.B.** jedes System $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\}$ mit $b\neq 0$ Basis, schon damit sind unendlich viele Basen angegeben.

e) Dimension ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren. Aus a), c), d) ist ersichtlich, dass es im $\mathbb{R}^2$ 2 linear unabhängige Vektoren gibt.

Angenommen, es gibt 3 linear unabhängige Vektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3$ im $\mathbb{R}^2$. Dann sind insbesondere $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ linear unabhängig und spannen die ganze Ebene $\mathbb{R}^2$ auf. $\vec{x}_3$ muss dann also Linearkombination von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sein. Somit können die 3 Vektoren nicht linear unabhängig sein.

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren und damit die Dimension ist also 2.