Aufgabe 5.85

Geben Sie $(3+4\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$ in algebraischer und trigonometrischer Darstellung an!

Lösung:

Vgl. Aufgabe 5.66: Ausdrücke mit komplexen Exponenten sind zunächst nur zur Basis e definiert: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$. Andere Basen müssen deshalb durch Logarithmieren auf diese Basis zurückgeführt werden: $a=\mathrm{e}^{\ln a}$.

Exponentielle Darstellung von 3+4i: $|3+4\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+4^2}=5,\ \varphi=\arctan\dfrac{4}{3}+2k\pi$ (I. Quadrant),

$$3+4\mathrm{i}=5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\arctan\frac{4}{3}+2k\pi)}=\mathrm{e}^{\ln 5+\mathrm{i}\,(\arctan\frac{4}{3}+2k\pi)}.$$

(Da der Exponent noch mit $(1+\mathrm{i})$ multipliziert werden wird, ist u.a. auch $2k\pi\mathrm{i}$ mit i zu multiplizieren, dadurch entsteht im Exponenten auch der reelle Ausdruck $-2k\pi$. Dieser kann nicht weggelassen werden, da $\mathrm{e}^{-2k\pi}\neq 1$ gilt. Braucht man nur die exponentielle Darstellung von 3+4i, so kann man wegen $\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}=1$ den Term $2k\pi\mathrm{i}$ im Exponenten weglassen.)

(Nichteindeutigkeit des Logarithmus im Komplexen: $\ln(3+4\mathrm{i})=\ln 5+\mathrm{i}\,(\arctan\frac{4}{3}+2k\pi)$)

$$\begin{aligned}(3+4\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}} &= \mathrm{e}^{\left(\ln 5+\mathrm{i}\,(\arctan\frac{4}{3}+2k\pi)\right)\,(1+\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{(\ln 5-\arctan\frac{4}{3}-2k\pi)+\mathrm{i}\,(\ln 5+\arctan\frac{4}{3}+2k\pi)}\\ &= \mathrm{e}^{(\ln 5-\arctan\frac{4}{3}-2k\pi)+\mathrm{i}\,(\ln 5+\arctan\frac{4}{3})}\approx 1.97811\mathrm{e}^{-2k\pi}(\cos 2.53673+\mathrm{i}\sin 2.53673)\\ &\approx(-1.62716+1.12485\,\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-2k\pi},\quad k \text{ ganz}\end{aligned}$$

(Beachte $\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}=1$, daher gilt auch $1^{\mathrm{i}}=\left(\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}\right)^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{-2k\pi}$!)