Aufgabe 5.81

Lösen Sie die Gleichung $z^2-(2+4\mathrm{i})z+5+(4-8\sqrt{3})\mathrm{i}=0$ mit Hilfe der üblichen Lösungsformel für quadratische Gleichungen!

Lösung:

$$z_{1/2}=1+2\mathrm{i}\pm\sqrt{1+4\mathrm{i}-4-5-4\mathrm{i}+8\sqrt{3}\mathrm{i}}=1+2\mathrm{i}\pm\sqrt{-8+8\sqrt{3}\mathrm{i}}$$

$$r=\left|-8+8\sqrt{3}\mathrm{i}\right|=8\sqrt{1+3}=16,$$

$$\tan\varphi=\frac{8\sqrt{3}}{-8}=-\sqrt{3},\quad \varphi=\arctan(-\sqrt{3})+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}\text{ (da II. Quadrant)}$$

$$-8+8\sqrt{3}\mathrm{i}=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=16\left(\cos\frac{8\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$z_{1/2}=1+2\mathrm{i}\pm\left\{\begin{array}{l}4\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\\[2mm] 4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\end{array}\right. =1+2\mathrm{i}\pm\left\{\begin{array}{l}4\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\\[2mm] 4\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\end{array}\right.$$

$$=1+2\mathrm{i}\pm\left(2+2\sqrt{3}\mathrm{i}\right)=\left\{\begin{array}{r}3+(2+2\sqrt{3})\,\mathrm{i}\\ -1+(2-2\sqrt{3})\,\mathrm{i}\end{array}\right.\approx\left\{\begin{array}{r}3+5.464\,\mathrm{i}\\ -1-1.464\,\mathrm{i}\end{array}\right.$$